UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(*Universidad del Perú, Decana de América*)

FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIDAD DE POST GRADO

MODELO DE ENSEÑANZA MODULAR PERSONALIZADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TESIS

Para optar el Grado Académico de:

DOCTOR EN EDUCACIÓN

PRESENTADO POR:

Jesús VILCHEZ GUIZADO

Lima - Perú

2007

A mis padres Alejandro y Rosa gestores de mi autoformación personal y profesional.

A Ángela mi compañera de siempre por su constante apoyo y, a mi hijo Jesús Rodrigo la razón de mi existencia.

AGRADECIMIENTO:

A mi asesor:

Dr. Kenneth Delgado Santa Gadea, por su sistemática y acertada orientación para concluir con esta tesis.

A mis jurados informantes:

Dr. Pedro Contreras Chamorro y a la Dra. Doris Gómez Ticerán, por sus valiosas sugerencias en el perfeccionamiento del presente informe Tesis.

A los Docentes:

Del Programa de Doctorado en Educación de la UNMSM, por su constante preocupación en la formación y capacitación de docentes de los diversos niveles educativos.

A todos los docentes de vocación que bregan a diario por su superación profesional y mejorar la calidad educativa de niños y adolescentes de nuestro país.

SUMARIO

Módulo Didáctico:

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DESCRIPCIÓN SUMARIA

Pág

CONTENIDO DEL MÓDULO DIDÁCTICO

Bibliografía complementaria:

R E S U M E N

El trabajo de tesis: **Modelo de Enseñanza Modular Personalizada de las Funciones Trigonométricas en el Quinto Grado de Secundaria**, responde a un intento de dar solución al problema del bajo rendimiento académico en el aprendizaje de las Funciones Trigonométricas de alumnos del quinto grado de secundaria de la localidad de Huánuco.

El problema identificado para el trabajo, resulta de un diagnóstico real de elementos básicos del proceso educativo: centro educativo, alumnos, docentes, planes y programas curriculares, textos escolares y materiales didácticos; luego, se identifican las causas del bajo nivel de aprendizaje de la matemática por parte de los alumnos, como son: la limitada dedicación de los docentes a su actividad, la escasa bibliografía y textos con contenidos y presentación didáctica inapropiada. En respuesta a problema descrito se elaboró un Módulo Didáctico para la enseñanza de las Funciones Trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano; formulándose la hipótesis de que su implementación y desarrollo en el proceso de enseñanza, permite un aprendizaje más significativo.

La elaboración y desarrollo del Modelo de Enseñanza Personalizada a través del Módulo Didáctico se sustenta en un marco teórico de temas relacionados con el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, que se sustenta en el desarrollo de los conceptos fundamentales educación, materiales y medios didácticos, referido al aprendizaje de las funciones trigonométricas a través de la enseñanza modular personalizada.

El proceso experimental se realizó con dos secciones, uno como grupo experimental que trabajaron con el Módulo Didáctico y el grupo de control que trabajaron en forma tradicional, seleccionados por el historial académico del grado anterior y de rendimientos homogéneos, iniciándose el trabajo de campo con una prueba de requisitos y se concluyó con una prueba de salida. Los resultados de la prueba de salida se analizaron e interpretaron por la función de distribución *T de Student*, llegándose a la conclusión de que el rendimiento académico del grupo experimental es significativamente superior al rendimiento académico del grupo control. Asimismo, se percibe que la enseñanza personalizada con el Módulo Didáctico motiva y desarrolla actitudes positivas para el aprendizaje individual y en grupos de los alumnos.

Con la elaboración y desarrollo de la enseñanza modular se tienen aportes, como:

-) Las Funciones Trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria del plano cartesiano y considerando conocimientos previos de geometría y álgebra elementales, es una alternativa a la enseñanza usual de la trigonometría como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, donde algunos conceptos, propiedades, representaciones gráficas, resultan insuficientes y poco consistentes.

-) Se tiene un material de trabajo que permite la interacción directa profesor y alumno, facilitando el desarrollo de capacidades de intuición, de abstracción y de razonamiento, relacionando con situaciones reales y con aplicaciones en la solución de problemas, propiciando el aprendizaje personalizado, poniéndose en práctica los procedimientos activos para el aprendizaje, paradigmas de la educación actual.

PALABRAS CLAVES: Enseñanza personalizada. Módulo didáctico. Aprendizaje significativo. Rendimiento académico. Métodos activos. Evaluación del aprendizaje. Material didáctico. Función trigonométrica.

A B S T R A C

The thesis work: **Model of Teaching to Modulate Personalized of the Trigonometrical Functions in the Fifth Grade of Secondary**, responds to an intent of giving solution to the problem of the first floor academic yield in the learning of the Trigonometrical Functions of students of the fifth grade of secondary of the town of Huánuco.

The identified problem for the work, is of a real diagnosis of basic elements of the educational process: educational center, students, educational, plans and curricular programs, school texts and didactic materials; then, the causes of the low-level of learning of the mathematics are identified on the part of the students, like they are: the limited dedication of the educational ones to its activity, the scarce bibliography and texts with contents and inappropriate didactic presentation. In answer to described problem a Didactic Module was elaborated for the teaching of the Trigonometrical Functions starting from the unitary circumference in the Cartesian plane; being formulated the hypothesis that its implementation and development in the teaching process, allow a more significant learning.

The elaboration and development of the Model of Custom Teaching through the Didactic Module are sustained in a theoretical mark of topics related with the mathematics's process teaching-learning that is sustained in the development of the concepts fundamental education, materials and didactic means, referred to the learning of the trigonometrical functions through the teaching to modulate personalized.

The experimental process was carried out with two sections, the experimental group worked with the Didactic Module in personalized form and the control group that worked in traditional form, selected by the academic record of the previous grade and of homogeneous yields, beginning the field work with a test of requirements and you concluded with an exit test. The results of the exit test were analyzed and they interpreted for the distribution function *T* of Student, being reached the conclusion that the academic yield of the experimental group is significantly bigger to the academic yield of the group control. Also, it is perceived that the custom teaching with the Didactic Module motivates and it develops positive attitudes for the individual learning and in the students' groups.

With the elaboration and development of the teaching to be modulated has contributions, as:

-) The Trigonometrical Functions starting from points in the unitary circumference of the Cartesian plane and considering previous knowledge of geometry and elementary algebra, it is an alternative to the usual teaching of the trigonometry like reasons among the sides of a triangle rectangle, where some concepts, estates, graphic representations, are insufficient and not very consistent.

-) The didactic module allows the direct interaction direct teacher and student, facilitating the development of capacities of intuition, of abstraction and of reasoning, relating with real situations and with applications in the troubleshooting, propitiating the custom learning, putting into practice the active procedures for the learning, paradigms of the current education.

KEY WORDS: Perzonalized Teaching. Didactic module. Significant learning. Academic yield. Active methods. Evaluation of the learning. Didactic material. Trigonometrical function.

R E S U M O

O trabalho de tese: **Modelo de Ensinar Modular Personalizou das Funções Trigonométricas no Quinto Grau de Secundário**, responde a uma intenção de dar solução ao problema do primeiro chão rendimento acadêmico na aprendizagem das Funções Trigonométricas de estudantes do quinto grau de secundário da cidade de Huánuco.

O problema identificado para o trabalho, é de uma real diagnose de elementos básicos do processo educacional: centro educacional, estudantes, educacional, planos e curricular programa, textos escolares e materiais didáticos; então, as causas do de baixo nível de aprendizagem da matemática é identificado por parte dos estudantes, como eles fossem: a dedicação limitada do educacional para sua atividade, a bibliografia escassa e textos com conteúdos e apresentação didática imprópria. Em resposta para problema descrito um Módulo Didático foi elaborado para o ensino das Funções Trigonométricas a partir da circunferência unitária no avião Cartesiano; sendo formulado a hipótese que sua implementação e desenvolvimento no processo pedagógico, permita uma aprendizagem mais significante.

A elaboração e desenvolvimento do Modelo de Costume que Ensina pelo Módulo Didático são contínuos em uma marca teórica de tópicos relacionada com o processo da matemática que ensino-aprende isso é contínuo no desenvolvimento dos conceitos educação fundamental, materiais e meios didáticos, recorreu à aprendizagem das funções trigonométricas pelo ensino modular personalizou.

O processo experimental foi levado a cabo com duas seções, o grupo experimental trabalhou com o Módulo Didático em forma personalizada e o grupo de controle que trabalharam em forma tradicional, selecionou pelo registro acadêmico do grau prévio e de rendimentos homogêneos, começando o trabalho de campo com um teste de exigências e você concluiu com um teste de saída. Foram analisados os resultados do teste de saída e eles interpretaram para a função de distribuição T de Estudante, sendo chegado à conclusão que o rendimento acadêmico do grupo experimental é significativamente maior ao rendimento acadêmico do controle de grupo. Também, é percebido que o costume que ensina com o Módulo Didático motiva e desenvolve atitudes positivas para a aprendizagem individual e nos grupos dos estudantes.

Com a elaboração e desenvolvimento do ensino ser modulado tem contribuições, como:

-) As Funções Trigonométricas a partir de pontos na circunferência unitária do avião Cartesiano e conhecimento prévio considerando de geometria e álgebra elementar, é uma alternativa ao ensino habitual da trigonometria como razões entre os lados de um retângulo de triângulo onde alguns conceitos, propriedades, representações gráficas, são insuficientes e não muito consistente.

-) O módulo didático permite para a interação direta o professor direto e estudante, enquanto facilitando o desenvolvimento de capacidades de intuição, de abstração e de raciocínio, relacionando com reais situações e com aplicações o diagnosticando, propiciando o costume aprendendo, pondo em prática os procedimentos ativos para a aprendizagem, paradigmas da educação atual.

PALAVRAS CHAVES: Ensino pessoal. Módulo didático. Aprendizagem significante. Rendimento acadêmico. Métodos ativos. Avaliação da aprendizagem. Material didático. Função trigonométrica.

INTRODUCCIÓN

El objetivo fundamental de la enseñanza de la matemática en el nivel secundario es hacer que los alumnos desarrollen sus capacidades de intuición, abstracción y de razonamiento lógico-matemático; que se expresa en el conocimiento de los conceptos y propiedades, su disposición para aplicarlos en la resolución de problemas diversos. Para el logro de este propósito, es imprescindible que los docentes que dirigen el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina científica tengan un amplio conocimiento de los tópicos de la matemática y sus estrategias de enseñanza, para así desarrollar el pensamiento lógico-matemática de sus pupilos.

En el presente trabajo titulado: **Modelo de Enseñanza Modular Personalizada de las Funciones Trigonométricas en el Quinto Grado de Secundaria**, resulta de involucrarse en esta problemática durante 17 años de labor como docente de matemática en el nivel de educación secundaria en diversos centros educativos y de indagaciones realizadas sobre condiciones académicas y metodológicas del docente y las situaciones de aprendizaje en los alumnos. Por ello, nos proponemos implementar una forma secuencial, interactiva y dinámica del proceso enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas a través de módulos didácticos con miras a superar las deficiencias y limitaciones en la asimilación de los contenidos temáticos que se imparten y su aplicación en la resolución de problemas diversos; rescatando aportes importantes del diseño de instrucción, de los métodos activos y del constructivismo educativo, implementado en las últimas décadas en el Perú y otros países de Latinoamérica.

La presente investigación consiste en identificar el efecto que produce el uso del módulo didáctico elaborado por el docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la enseñanza personalizada. Comprobándose que cuando la enseñanza a los alumnos es reforzada con un material didáctico que propicie el autoestudio y el trabajo personalizado en clase, se logran aprendizajes significativos.

El tipo de estudio es “cuasiexperimental”, realizado con dos grupos: un grupo experimental y otro de control. La medición se efectuó mediante una prueba de requisitos, varias pruebas de proceso y una prueba de salida. El procesamiento de datos se llevó a cabo mediante la decisión estadística, a través de medidas de tendencia central, de dispersión, y una prueba de hipótesis para la diferencia de medias.

La investigación se distribuye en cuatro capítulos. El Capítulo I trata del Planteamiento del Estudio, en la que se describe el problema, se formula el problema, los objetivos y la hipótesis de investigación, precisando la importancia y limitaciones. En el Capítulo II se desarrolla el marco teórico incidiendo en los antecedentes, desarrollo sistemático de las bases teóricas de manera deductiva y conceptos relacionados con las funciones trigonométricas, donde se sustentan al problema; asimismo, se conceptualizan algunos términos. En el Capítulo III se describe el procedimiento metodológico, precisando la población y muestra, las acciones realizadas en el estudio, herramientas para la colecta de datos, procedimiento de experimentación y procedimiento de evaluación, así como las técnicas utilizadas para el tratamiento de los datos. Finalmente, en el Capítulo IV se incluye los resultados del trabajo de campo (implementación del proceso de enseñanza modular personalizada, encuestas y pruebas) y proceso de contraste de hipótesis; luego se dan las conclusiones, sugerencias a partir de los resultados del trabajo experimental realizado. Las fuentes se consignan en el formato (apellido del autor, año) y a las citas textuales en el formato (apellido del autor, año: página), estas fuentes bibliográficas se describen con detalle en la sección bibliografía.

El informe de tesis presentado, se completa con Módulos Didácticos elaborado sobre funciones trigonométricas para el quinto grado de educación secundaria. Que se inicia con el estudio de arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, ángulos orientados y su medición, para presentar las funciones trigonométricas como funciones reales y sus gráficos, funciones trigonométricas inversas, identidades y ecuaciones trigonométricas, con ejemplos ilustrativos, y cada sección concluye con un grupo de ejercicios de comprobación de aprendizajes y resumen del estudio realizado en cada unidad.

Esperando que en la investigación se plasmó la finalidad primordial del estudio que nos propusimos, presentar una propuesta metodológica para la enseñanza eficiente que repercuta en el logro de aprendizajes significativos de la trigonometría en los alumnos del quinto grado de secundaria; y, consideramos haber cumplido con los requisitos académicos y metodológicos exigidos por la Escuela de Post-Grado para optar el Grado Académico de Doctor en Educación en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Mg. Jesús VILCHEZ GUIZADO

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1. ÁREA PROBLEMÁTICA

1.1. Diagnostico Situacional

Con la finalidad de tener resultados fidedignos de lo que viene pasando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas en el quinto grado de secundaria, desde una perspectiva holística, hemos recopilado información de los factores materiales y humanos que convergen en este proceso, como son: los centros educativos, el programa curricular, los objetivos, contenidos, el alumno, el docente, el entorno, etc., a través de entrevistas, encuestas y visitas a los centros educativos de la localidad de Huánuco.

1.1.1. Centros Educativos

En la Educación Secundaria del país, el aprendizaje de las ciencias y de la Matemática en particular es deficiente. Esto se expresa en la cantidad considerable de alumnos desaprobados; es decir, el bajo rendimiento académico en matemática es un problema latente. Esta problemática se observa también en la provincia de Huánuco, donde del universo total de desaprobados en todas las asignaturas, aproximadamente el 53% corresponden a la asignatura de matemática (Subdirecciones de Formación General, 2004). Este hecho confirma y ratifica la Evaluación del Rendimiento Escolar, que ubica al Perú en el último lugar en Matemática (UNESCO, 1999, 2000 y 2002).

Lo descrito, en los centros educativos se expresa a través de:

-) Mobiliario e infraestructura inapropiada para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

-) Falta de actualización e innovación en contenidos y metodologías de enseñanza por parte del docente, que se refleja en la repetición literal de definiciones, ejemplos y tareas, como se ha constatado en cuadernos de alumnos de tres promociones diferentes que llevaron la asignatura de Matemática con los mismos docentes.

-) Escaso compromiso de algunos docentes de matemática con el quehacer educativo. Por versión de los alumnos incumplen con el horario de clases, y por versión de coordinadores de área, no se alcanzan los objetivos y contenidos planteados.

La presencia de estas tres deficiencias, inciden en que efectivicen en promedio sólo el 80% de las horas programadas para el desarrollo de clases durante el año escolar, mientras que los objetivos y contenidos programados se desarrollan entre el 75% y 84%, como manifiestan más del 50% de los docentes encuestados al responder a la pregunta: *¿Qué porcentaje de los objetivos y contenidos programados para la enseñanza de la Matemática desarrolla durante el año*?

Por otro lado, se implementaron programas de capacitación como el Plan Nacional de Capacitación Docente, "PLANCAD", que tuvo como fin mejorar la calidad de la educación, privilegiando las estrategias metodológicas tendientes al logro de competencias y capacidades (MED, 98-2004), donde no se desarrollaron contenidos matemáticos del nivel secundario y no se plasmaron los frutos esperados, puesto que en dicho programa se puso énfasis en algunas recetas metodológicas, descuidando lo fundamental: el conocimiento de tópicos de la matemática por parte del docente y también por falta de motivación y esfuerzo de la mayoría de los docentes participantes.

Asimismo, al indagar sobre la elaboración y uso de materiales didácticos en las distintas instituciones educativas de la localidad, tales como: módulos, textos, medios audiovisuales, computadoras, etc., se constató que no se elaboran y los pocos existentes se utilizan de manera inadecuada (así por ejemplo, la computadora se usa como máquina de escribir y no como medio de enseñanza).

1.1.2. Programas Curriculares

La estructura curricular básica de Matemática para el quinto grado de educación secundaria está vigente desde la década de los años 80, y ha sido adaptada a los años posteriores por Decretos y Resoluciones Ministeriales. Así, para el año 2003, de acuerdo a la Resolución Ministerial Nº0310-2003-ED, se decreta que los centros educativos no comprendidos dentro del proceso experimental, seguirán con el plan de estudios vigente (1989-1993), donde los contenidos curriculares actuales de la matemática para el quinto grado de secundaria (Trigonometría), en su esencia son casi los mismos a la propuesta curricular del año 1989.

En los diversos programas curriculares de Matemática para el nivel secundario, desde la década de los 70, al que tuvimos acceso, hasta el presente, consigna el tema de la Trigonometría sólo en el quinto grado, puesto que se trata de funciones trascendentes cuya comprensión tiene alto grado de dificultad para los alumnos.

En los programas curriculares de los centros educativos de Huánuco, para tratar la Trigonometría, se considera los siguientes:

<u>OBJETIVOS</u>

1. *"Reconocer y determinar los sistemas de medidas angulares y las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, para resolver ejercicios con identidades trigonométricas"*

   Este primer objetivo se refiere a la enseñanza de las funciones trigonométricas mediante la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Esta presentación tiene serias limitaciones, pues ofrece una idea errónea y confusa a los estudiantes sobre las funciones trigonométricas.

2. *"Determinar las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico y usar la tabla de valores naturales, para aplicarla en la solución de ejercicios con funciones trigonométricas"*

   Se repite el estudio de las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria reduciéndolos a triángulos rectángulos, en donde las tablas de los valores naturales ya no se usan en la mayoría de los centros educativos. En todo caso se debe hacer referencia al uso y manejo de calculadoras y computadoras. Desde este punto de vista no es apropiado hablar de funciones.

3. *"Calcular los ángulos de elevación y de depresión, aplicando las funciones trigonométricas en la resolución de triángulos y de ecuaciones trigonométricas, vinculadas con situaciones de la vida real"*

   Está referida a las aplicaciones de la trigonometría en el cálculo de la longitud de los catetos y la hipotenusa de triángulos rectángulos, y las medidas de sus ángulos correspondientes.

CONTENIDOS

El diseño curricular del año 2 000, divide a la trigonometría en dos unidades:

1. *Sistema de medidas angulares. Razones o funciones trigonométricas de un ángulo en el triángulo rectángulo. Identidades trigonométricas.*

2. *Funciones trigonométricas de un ángulo en el círculo trigonométrico. Razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud. Reducción al primer cuadrante. Transformaciones: funciones trigonométricas de ángulos compuestos. Tabla de valores naturales de funciones trigonométricas. Resolución de triángulos.*

El diseño curricular básico del año 2 003, lo divide también en dos unidades:

1. *"Ángulo y arco trigonométrico. Sistema de medidas angulares. Razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios. Identidades pitagóricas, recíprocas y por cociente"*

2. *"Sistema de coordenadas rectangulares. Ángulo en posición normal. Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal. Razones trigonométricas en ángulos cuadrantales. Ángulos coterminales. Razones trigonométricas de ángulos negativos. Reducción al primer cuadrante. Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos. Ley de senos y cosenos"*

El programa del 2003, para la "Nueva Secundaria", recién hace mención de arcos y ángulos trigonométricos, el estudio de sistema de coordenadas rectangulares y ángulos coterminales. En los demás no existe diferencia significativa entre la secuencia temática de los contenidos de la Trigonometría que propone el Ministerio desde la década de los 70, que inicia el estudio del tema a partir de los triángulos rectángulos.

En concordancia con los modelos educativos implementados, las estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática han evolucionado en las últimas décadas desde los modelos neo-conductistas en los 70, y 80; desde los 90 se toma como fuente la psicología cognitiva, luego se desarrolla el modelo constructivista, que concibe al aprendizaje y la enseñanza no sólo en lo cognitivo, sino el desarrollo integral del alumno como sujeto de la sociedad; cuya implementación en nuestro sistema educativo no tuvo resultados significativos en el logro de aprendizaje de la matemática de los alumnos del nivel secundario.

En suma, la programación curricular elaborado en las cuatro instituciones educativas estatales tomados como población referencial de estudio siguen estrictamente la secuencia que se indica en el Plan Curricular del área de matemática emanado por el Ministerio de Educación. Los contenidos y objetivos no se reformularon ni reajustan de un año a otro, sólo se limitan a modificar las fechas en la programación curricular y no se hace una evaluación integral de las fortalezas y debilidades que se tuvo en el año anterior; asimismo, no se toma en cuenta el perfil matemático que debe tener el alumno que egresa de la Educación Secundaria (*Entrevistas no estructurada, revisión de programas y de unidades didácticas en las coordinaciones*).

1.1.3. Alumnos

Entre algunas características de los alumnos, que cursan el quinto grado de secundaria en el Colegio Nacional de Aplicación, destacan:

- Son adolescentes de ambos sexos cuyas edades fluctúan entre 15 y 18 años.
- Según los estadios del desarrollo intelectual de Jean Piaget, están en la etapa de las operaciones formales, actividades mentales que implican asimilación de conceptos abstractos e hipotéticos, de utilizar supuestos y el razonamiento lógico proposicional en la resolución de problemas.
- Aproximadamente el 80% de alumnos encuestados tiene poco interés por el estudio de la matemática, y tienen deseos de seguir estudios superiores, previa preparación en academias pre-universitarias.
- Dedican escaso tiempo para el estudio y la práctica de la Matemática fuera del aula. Según la encuesta aplicada a los alumnos, el 52,56% no estudia y el 23% a lo más lo hace una hora diaria, debido a que tienen otras tareas que desempeñar en el ambiente familiar y social.
- Durante el proceso de enseñanza se limitan a escuchar la exposición del profesor tomando apuntes, intervienen en forma esporádica con preguntas referidos al tema. Las tareas domiciliarias y los que se desarrollan en clase consisten en ejercicios propuestos de algún texto escolar. Son evaluados por el docente con sendas pruebas para constatar la retención de lo enseñado y lo practicado.

En la prueba aplicada, previo al experimento (anexo N° 6), se detectaron las siguientes dificultades:

- Comprensión de lenguaje simbólico de la Matemática.
- Diferenciar una función de una relación.
- Identificar el dominio y rango de una función.
- Identificar relaciones de simetría entre puntos del plano cartesiano.
- Identificar la regla de correspondencia de una función.
- Trazar la gráfica de una función real.
- Identificar las funciones pares e impares, periódicas y monótonas.

1.1.4. Docentes

De la encuesta administrada a 60 docentes de la especialidad de Matemática, de las entrevistas y de las visitas a diversos centros educativos, se tuvo la siguiente información:

- Aproximadamente el 85% de los docentes encuestados son titulados, de ellos el 70% provienen de las facultades de educación de las universidades de la región y el 30% de Institutos Pedagógicos; y laboran en condición de nombrado y su tiempo de servicio de magisterio varía entre cuatro a quince años.

- En su formación matemática tienen deficiencias en la conceptualización de las funciones trigonométricas y en la identificación de sus propiedades. La mayoría no recuerdan, ni utilizan, conceptos matemáticos aprendidos en su formación docente, tienen poca habilidad para deducir y analizar algunas propiedades de las funciones trigonométricas, no estudian textos actualizados del nivel medio y superior para reforzar sus conocimientos sobre temas de trigonometría.

- En la encuesta, al preguntarse ¿*Cuál de los métodos didácticos sueles utilizar con más frecuencia durante el proceso de enseñanza de la Trigonometría*? (Pregunta 13, anexo 2), la mayoría de los docentes respondieron que utilizan el expositivo-dialogal. Al asistir a algunas clases de los colegas, constatamos que el estudio del tema lo hacen en forma simbólica e intuitivo, carente de formalidad matemática; no se conjugan ambas formas de presentación para tener resultados más eficaces. Asimismo, no hacen uso de conocimientos previos para abordar los diversos tópicos de la trigonometría, no propician estrategias de aprendizaje activo individual ni grupal y, en la etapa de fijación de tareas, no incentivan el estudio individual y cooperativo.

- En la metodología que usan en sus clases, no existen tratamientos individuales ni en pequeños grupos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se limitan a seguir una secuencia de actos: una exposición, resolución de algunos ejemplos y tareas para casa en forma generalizada.

- En respuesta a la pregunta *¿En qué porcentaje usted asiste en forma puntual a sus actividades académicas en su centro educativo durante el año escolar*? (pregunta 6, anexo 2), cumplen en forma parcial con su horario de clases, en promedio al 80% durante año escolar, debido a las múltiples actividades extracurriculares que se programan en el centro educativo y a las constantes inasistencias por diversos motivos. Asimismo, logran desarrollar los objetivos y contenidos programados del curso sólo del 84% al 75% durante el año escolar (pregunta 5, anexo 2).

- El 60% de los docentes de matemática encuestados manifiestan que no preparan sus clases, y algunos que sí lo hacen, se limitan a utilizar, como texto de consulta a los libros escolares de circulación nacional que están elaborados de acuerdo al programa curricular del Ministerio de Educación, tales como: Rojas Poémape, Coveñas Naquiche, Flavio Vega Villanueva, entre otros (pregunta 10, anexo 2). Ninguno de los docentes encuestados, utilizan textos de nivel superior e intermedio para "preparar su clase" y están alejados de los fundamentos matemáticos que sustentan los tópicos que enseñan. También, no elaboran sus propios materiales didácticos con miras a mejorar su labor docente.

- La mayoría de los docentes de la especialidad de matemática tienen deficiente formación académica y metodológica en matemática, pues respondieron en forma errónea las preguntas 7 y 8, (anexo N° 2), relacionados con conocimientos de trigonometría; y consecuentemente escasa habilidad para manejo de estrategias didácticas para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje;

De lo descrito, es imprescindible implementar algunos reajustes en los contenidos que se enseñan, en las estrategias metodológicas que se usan, en la elaboración de materiales didácticos con miras a dinamizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática para mejorar el rendimiento escolar en matemática.

1.1.5. Material Bibliográfico

Los docentes de Matemática encuestados en la pregunta referido al uso de bibliografías para preparar su clase (pregunta 10, anexo 2), El 40% manifiesta que utiliza el texto de Manuel Coveñas Naquiche, el 30% consigna a Alfonso Rojas Poémape y, el 16,7% considera el texto del profesor Flavio Vega Villanueva.

Estos autores, en sus textos, presentan los siguientes contenidos de trigonometría.

FLAVIO VEGA VILLANUEVA	ALFONSO ROJAS PÓEMAPE	MANUEL COVEÑAS NAQUICHE
1. Ángulos geométricos y trigonométricos. Sistemas de medidas angulares. 2. Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. 3. Funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud. 4. Reducción al primer cuadrante, representación gráfica. Variaciones. 5. Identidades trigonométricas. 6. Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y del ángulo mitad. Transformaciones. 7. Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos de elevación y depresión. 8. Resolución de triángulos en general. Ley de senos, cosenos y tangentes.	1. Definición de ángulo, sistema de medida angular, aplicaciones. 2. Triángulos notables, propiedades, otros triángulos notables, resolución de triángulos rectángulos. 3. Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. 4. Razones trigonométricas de cualquier magnitud, representación trigonométrica. 5. Análisis de las funciones trigonométricas, identidades. 6. Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos, de ángulos dobles, de ángulo mitad; transformaciones trigonométricas. 7. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Ecuaciones trigonométricas.	1. Ángulo trigonométrico. 2. Sistema de medidas angulares. 3. Razones trigonometrías en el triángulo rectángulo. 4. Identidades trigonométricas. 5. Razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud. 6. Estudio de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico. 7. Funciones trigonométricas de números reales. 8. Transformaciones trígonométricas. 9. Resolución de triángulos rectángulos. 10. Ángulos horizontales. 11. Funciones trigonométricas inversas.

CUADRO RESUMEN DEL CONTENIDO DE TEXTOS ESCOLARES

Del contenido desarrollado en los textos, podemos destacar:

1. Los textos de Alfonso Rojas Poémape y Manuel Coveñas consideran a la trigonometría en el primer capítulo, definen las funciones trigonométricas como razones entre lados del triángulo rectángulo. Desde esta perspectiva desarrollan todos los temas y no se formaliza definición alguna; mencionan algunos problemas motivadores, ejemplos resueltos y una gama de ejercicios para desarrollar. Mientras que el texto del Profesor Flavio Vega Villanueva trata el tema de Trigonometría en la octava unidad, desarrolla funciones trigonométricas tomando como referencia el

círculo trigonométrico; para deducir algunas fórmulas usa triángulos rectángulos en un sistema de ejes rectangulares, sin hacer uso de las coordenadas del plano.

2. Analizando algunos puntos del contenido temático, podemos citar:

   GRÁFICAS: El texto de Alfonso Poémape y Manuel Coveñas, al final del capítulo se desarrolla, en forma resumida las gráficas de las funciones trigonométricas y sus características; mientras que el profesor Flavio Vega Villanueva no lo considera.

   ANGULOS CUADRANTALES. Las funciones trigonométricas "*cuadrantales*" de 0, $\pi/2$, π y $3\pi/2$ radianes cuyos valores resultan de la forma $a/0$, el texto del profesor Flavio Vega lo considera como "*infinito*", de Manuel Coveñas como "*no existe*" y Alfonso Rojas Poémape como "*no definido*".

   FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS: Sólo uno de los autores analizados, el texto de Manuel Coveñas, desarrolla las funciones trigonométricas inversas y sus gráficas en forma breve; mientras que el de Alfonso Rojas Poémape se limita a desarrollar el tema de ecuaciones trigonométricas.

   APLICACIONES. Casi todo el desarrollo del tema, inclusive las "definiciones" o ideas de funciones trigonométricas se sustentan en la resolución de triángulos rectángulos y, en menor proporción, se aplica a la resolución de triángulos oblicuángulos. No se hace mención de aplicaciones a la física, mucho menos al estudio de fenómenos periódicos.

3. Los tres autores tienen textos de Matemática para los cinco grados de educación secundaria; sin embargo, en los últimos años, el uso del texto de Alfonso Rojas Poémape y de Manuel Coveñas gozan de la preferencia en toda la región y el país, ambos con objetivos y contenidos estructurados de acuerdo al programa oficial.

4. Estos tres textos, los más usados por los docentes y algunos alumnos, con sus bondades y limitaciones, no orientan ni automotivan a los alumnos para su lectura. Pues, se limitan a dar algunos conceptos, deducir algunas fórmulas y presentar una gama de ejercicios resueltos y propuestos.

1.1.6. Medios y Materiales Didácticos

Entendiendo que los medios y materiales son elementos fundamentales, coadyuvantes y de apoyo para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general y de la Trigonometría en particular, se observa que:

- Sólo cuentan con tizas, mota, uno o dos juegos de reglas y escuadras como recursos para que el docente los utilice durante su labor de enseñanza.

- Los alumnos llevan consigo sólo un cuaderno de apunte, pocos tienen a su alcance algún texto, como material y medio de estudio.

- No existe materiales didácticos preparados por el docente y los mismos alumnos para la enseñanza de la Matemática, mucho menos para desarrollar tópicos específicos como la trigonometría.

- En la mayoría de los colegios existen televisores y computadoras, pero no son utilizados como medio de enseñanza de la Matemática, sino que están orientados a actividades de carácter netamente administrativo.

La no existencia de trabajo alguno en la elaboración de material didáctico y de la utilización de medios didácticos acordes a la realidad e interés de los alumnos, que faciliten el logro de aprendizajes significativos, es consecuencia de que el docente no conjuga su preparación académica con la metodología, inherentes a su actividad profesional.

1.1.7. Cuadernos de alumnos

En los cuadernos revisados de algunos alumnos del quinto grado de secundaria no se mencionan conocimientos previos ni problemas motivadores, se presenten los temas de Trigonometría colmado de errores y abusos de notación y de lenguaje, se distorsionan inclusive algunas ideas que se dan en los textos escolares analizados.

Por ejemplo: Las funciones trigonométricas se presentan considerando "un triángulo rectángulo ABC, de lados a = cateto opuesto, b = hipotenusa y c = cateto adyacente; se tienen seis funciones trigonométricas: sen$A = a/b$, cos$A = c/b$, tg$A = a/c$, ctg$A = c/a$, sec$A = b/c$, cosec$A = b/a$, esto hace que los alumnos tengan dificultades para entender las funciones trigonométricas de ángulos obtusos, periodicidad, representación gráfica, etc.

Sólo en dos cuadernos de los ocho revisados, encontramos las gráficas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente; pero no se hace mención de algunas características de estas funciones, menos de los procedimientos de sus trazos.

En ninguna de los cuadernos revisados se mencionan funciones trigonométricas inversas, ni las ecuaciones trigonométricas a pesar de que se menciona en el programa y en los textos que usan los docentes.

Por lo expuesto, el trabajo que proponemos consiste en la presentación de las funciones trigonométricas como funciones reales de variable real, a partir de la identificación y manipulación de puntos pertenecientes a la circunferencia unitaria, de ecuación: $x^2 + y^2 = 1$ que facilita comprender la periodicidad, dominio, rango y otras características de estas funciones que tiene múltiples aplicaciones en la ciencia, la tecnología y en el estudio de temas de la Matemática superior, como: los números complejos, vectores, movimiento armónico simple, coordenadas polares, series funcionales, etc.

1.2. Determinación del Problema

Consideramos que el responsable principal del proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática es el docente, por ello recogemos lo vertido por Pedro Gómez durante el II CONEM-99; "*yo veo al profesor de matemáticas como un diseñador y ejecutor de experiencias que pone a los estudiantes en interacción con él mismo, con los otros estudiantes y con el conocimiento que posee para que puedan construir conocimientos matemáticos que queremos que todos obtengan; por consiguiente el profesor debe ser un profesional; y para ser un profesional, tener el conocimiento producto de esa disciplina, de esa profesión y debe ser capaz de describir y caracterizar el estado de comprensión de los estudiantes. Si no sabe en qué estado están los estudiantes, no puede saber a qué estado puede llevarlos*".

De las indagaciones hechas, el docente de Matemática del nivel secundario de la región Huánuco presenta una formación deficiente, en cuanto al conocimiento matemático y metodológico, y realiza sus clases con un esquema didáctico predominante y sesgado al esquema de enseñar al alumno (modelo pasivo) y no orientar que aprenda el alumno (modelo activo).

Por otro lado, es una necesidad reajustar contenidos de la trigonometría en un contexto más simple de manejar e implementar nuevas metodologías activas, como la enseñanza a través de procesos activos y con participación de los alumnos. Esto nos plantea la inquietud de este estudio, que nos permite conocer hasta qué punto puede influir la implementación de nuevas estrategias metodológicas en el logro de resultados académicos eficientes en los estudios secundarios.

A través de un seguimiento e involucrarse en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, llegamos a determinar algunos problemas básicos, como:

- La formación deficiente de algunos docentes de matemática, en lo que concierne al conocimiento de los temas que son materia de su enseñanza.
- Carencia de una capacitación permanente y continua del personal docente, en contenidos y estrategias metodológicas para la enseñanza de la Matemática.
- La falta de equilibrio en la enseñanza de la Matemática entre sus fines formativo, funcional e instrumental, durante la acción educativa.
- Deficiente innovación y adaptación a la realidad, en la manera de llevar la secuencia de los contenidos curriculares, durante la enseñanza de la matemática.
- El escaso material bibliográfico para abordar el estudio de la Matemática (Trigonometría) y algunos textos vigentes de Matemática son elaborados conforme a la propuesta curricular del Ministerio de Educación, sin creatividad ni adecuados a la realidad actual.
- Falta de elaboración y manejo de materiales y medios didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

- El uso inapropiado de la tecnología computacional durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y;

- La casi nula actitud participativa individual y grupal de los alumnos en sus procesos de aprendizajes, debido al uso de una metodología que concibe el aprendizaje como un conjunto de acciones mecánicas que se limitan a dar contenidos acabados, como recetarios, formando en los estudiantes hábitos perniciosos como el memorismo y el conformismo.

Los problemas descritos nos lleva a sostener la necesidad de proponer estrategias y métodos didácticos para promover y/o mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema de funciones trigonométricas en el quinto grado de educación secundaria, pues consideramos que los egresados de este nivel deben tener una buena preparación matemática (conceptuales, procedimentales y actitudinales), para solucionar en forma eficaz y eficiente problemas de matemáticas y así aplicarlas en la resolución de problemas de su realidad.

Una de estas estrategias es la denominada la enseñanza modular personalizada, lo que nos lleva a formular el problema de la presente investigación en los siguientes términos:

1.3. Formulación del Problema

1.3.1. Problema general

¿Cuál es el nivel del rendimiento académico logrado a través de la enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano en los alumnos del quinto grado de secundaria?

1.3.2. Problemas específicos

- ¿Qué aspectos deben considerarse en la elaboración de módulos didácticos para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas, con miras a mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje?

- ¿Cómo se lleva a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje mediante la implementación de la enseñanza personalizada a través de módulos didácticos de las funciones trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria en el plano cartesiano?

- ¿Existen diferencias significativas en el rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas entre los alumnos que reciben la enseñanza personalizada con módulos didácticos, y los alumnos que la estudian con el procedimiento tradicional?

2. OBJETIVOS

Los objetivos planteados en el siguiente estudio están enmarcados y orientados a resolver los problemas formulados:

2.1. Objetivo General

Comprobar que con la implementación del modelo de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano se mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.

2.2. Objetivo Específicos

1. Diseñar y elaborar módulos didácticos para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas, adecuados al aprendizaje individual y grupal, que facilite el aprendizaje de los alumnos y la labor del docente en el aula.

2. Desarrollar la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano a través de módulos didácticos, para motivar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos del quinto grado de secundaria.

3. Analizar y comparar el nivel del rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas entre los alumnos que desarrollan el tema a través de la enseñanza personalizada con módulos didácticos, y aquellos que desarrollan a través del procedimiento tradicional.

3. SIGNIFICATIVIDAD DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación es un interno de abordar y responder a un problema permanente de nuestra realidad educativa, como es el proceso de enseñanza-aprendizaje y el rendimiento escolar en Matemática de los alumnos de la educación secundaria y en particular en el quinto grado, que según:

3.1. El criterio Temporal, permitió:

- Implementar el modelo de enseñanza modular personalizada; que consiste en la selección, secuenciación de los contenidos; organización, desarrollo y control de trabajo en el aula que garantice el aprendizaje integral y sistemática de los temas estudiados con participación consciente y activa del alumno en la construcción de sus conocimientos matemáticos y en el fortalecimiento de su capacidad de intuición y abstracción.

- Contextualizar la concepción de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en función de las necesidades, intereses y aspiraciones que tienen los estudiantes que egresan de la educación secundaria.

- Reestructurar la secuencia temática y mejorar el tratamiento metodológico durante el proceso enseñanza-aprendizaje que sea asequible y de fácil comprensión para el alumno, donde prime los métodos activos en el proceso de construcción del conocimiento, la asignación de significados y criterios, y el tratamiento adecuado de los errores, para mejorar el aprendizaje de los alumnos.

- Llevar a cabo la enseñanza del tema, a través del uso de material didáctico elaborado por el docente, para un mejor aprovechamiento de las clases y el logro de aprendizajes significativos en los alumnos.

- Coincidir con los lineamientos del diseño curricular básico de educación secundaria en el área de Matemática 2004, que propugne la búsqueda de calidad total en la educación. Persigue que los estudiantes: "…*Aprendan a valorar la matemática, se sientan seguros de su capacidad para hacer matemática, lleguen a resolver problemas matemáticos, aprendan a comunicarse mediante la matemática y aprendan a razonar matemáticamente";* a través del desarrollo de capacidades de: "*Razonamiento y demostración, interpretación de gráficos y/o expresiones simbólicas y, resolución de problemas*" (Diseño Curricular Básico, 2004).

3.2. El criterio Teórico

El trabajo, está centrado en la regulación del proceso de aprendizaje acorde a los lineamientos de la política educativa actual, basado en el paradigma constructivista, que postula que el conocimiento se construye mediante la interacción con otros y con los objetos circundantes y que propugna el **aprendizaje significativo**, teniendo como centro de la clase al alumno, e incide en el aprendizaje formativo, instrumental y personalizado de la matemática, en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Donde el docente cumple el rol de guía y conductor de la actividad investigadora y creativa de los alumnos, a través del uso pertinente del módulo didáctico como medio y material educativo.

3.3. El criterio Práctico:

Desde el punto de vista técnico-pedagógico, teniendo como modelo nuestra propuesta, el profesor analiza la problemática de la enseñanza, diseña y elabora con antelación las estrategias didácticas para desarrollar el estudio del tema, entrega el material una clase antes de abordar el tema, luego expone en forma breve y resumido el contenido temático; pone en práctica las etapas de motivación, conceptualización, ejemplificación, evaluación y extensión. En esta última se propicia el estudio personalizado y cooperativo del módulo didáctico y la resolución de los **ejercicios de comprobación de los aprendizajes.**

Desde la temática, el estudio de las funciones trigonométricas, permite conjugar los conocimientos de álgebra estudiados en el tercer grado y geometría estudiados en el cuarto grado, explotando al máximo el plano cartesiano. Donde, los alumnos hacen un estudio analítico de las funciones trigonométricas, identificando las diversas propiedades y los signos según los cuadrantes. Por otro lado, explota la riqueza de sus propiedades que son necesarios para modelar y simular el comportamiento de los distintos fenómenos periódicos, que se presentan en las ciencias relacionadas con las telecomunicaciones, que es el detonante actual del desarrollo de la ciencia y la tecnología.

Desde el punto de vista **tecnológico**, en el proceso experimental se hace uso pertinente de recursos, medios y materiales educativos, asimismo, se utilizan softwares matemáticos como Derive, Mathematica y Matlab, para la construcción perfecta del gráfico de las funciones trigonométricas, las mismas que facilitan visualizar y asimilar sus diversas propiedades, motivando el aprendizaje interactivo personalizado.

De los tres criterios expuestos, con este modesto aporte se establece la validez empírica de la implementación de una estrategia de enseñanza a través de módulos didácticos, para saber la eficacia de su aplicación en el proceso de enseñanza de la matemática escolar, reportándonos información que sirve de material de reflexión para el quehacer docente y dar inicio hacia un cambio de actitud. Por otra parte permite generar acciones tendientes a promover, practicar y realizar investigaciones sobre nuevas estrategias didácticas que permiten elevar el nivel matemático de los alumnos en el nivel secundario.

4. ALCANCES Y LIMITACIONES

4.1. Alcances

El presente trabajo está referido a la realidad educativa, en el nivel de educación secundaria, de la localidad de Huánuco, según estudio del INEI (2000), es el segundo departamento más pobre del Perú.

Los resultados y conclusiones de esta investigación tienen validez interna y externa. La ***validez interna*** dado a través de las diversas etapas de la implementación de la estrategia didáctica experimentada, con la cual se produce una evolución ascendente del rendimiento académico, expresada en el desarrollo de aprendizajes significativos del tema durante el proceso y el uso eficaz y eficiente de los módulos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría. La ***validez externa***: partiendo de la población en estudio, los hallazgos pueden generalizarse a la población de todos los estudiantes del quinto grado de secundaria de la localidad de Huánuco; y, en un estudio macro los resultados son extensibles a otros grados de estudio y otras asignaturas en los centros educativos de la región centro oriental del Perú, cuya realidad educativa es isomorfo al de la región Huánuco.

4.2. Limitaciones

La presente investigación se ha visto afectado durante su implementación y desarrollo experimental en varios aspectos, tales como:

- Para la muestra del estudio se asignaron dos secciones, sólo teniendo en cuenta sus antecedentes académicos y luego refrendados con una prueba de requisitos.

- El experimento se realiza en un capítulo de la asignatura, en base al Diseño Curricular Básico, durante las 9 primeras semanas de clases, que corresponden al primer y segundo bimestres del año escolar.
- La prueba para la evaluación de requisitos fue elaborada sólo por el docente investigador, mientras la evaluación de salida (post-prueba) fue planteada por los docentes que dirigen el grupo de control y grupo experimental, para los calificativos de la prueba bimestral.
- El estudio estuvo centrado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de trigonometría, a través de la administración de pruebas, encuestas, y el análisis de los resultados obtenidos en el proceso.
- La investigación se realizó bajo las restricciones cronológicas que se tiene en los centros educativos estatales, toda vez que tiene que cumplirse con el cronograma y los lineamientos emanados desde el Ministerio de Educación, Dirección Regional de Educación y el Centro Educativo.
- La actitud de no participar de los docentes y los alumnos, en el proceso de recopilación de información, fue superada en parte con la ayuda de otros colegas y autoridades educativas.
- Por cuestiones logísticas de acceso permanente a los grupos, el trabajo de campo se ejecuta sólo durante nueve semanas.

5. FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

La hipótesis de trabajo se formula en concordancia con el problema y los objetivos previamente planteados.

5.1. Hipótesis Principal

Con el desarrollo de la enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, se mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.

5.2. Sub hipótesis

1. La elaboración de un módulo didáctico para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas adecuado al estudio individual y grupal, facilita el aprendizaje de los alumnos y la labor del docente en el aula.

2. La aplicación de módulos didácticos durante las sesiones de clase sobre las funciones trigonométricas a partir de los puntos y arcos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano, motiva y facilita el aprendizaje de los alumnos.

3. Existen diferencias significativas del rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas entre alumnos que desarrollan el tema a través de la enseñanza personalizada con módulos didácticos, y aquellos que desarrollan a través del procedimiento tradicional.

6. IDENTIFICACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE VARIABLES

6.1. Identificación

Variable Independiente: Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas.

Variable Dependiente: Rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas.

6.2. Clasificación de variables

Siguiendo la clasificación propuesta por Mejía Mejía (2005), la variable:

<u>Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas</u>, es:

-) **Según la función que cumple en la estructura de hipótesis**: Variable independiente.

-) **Según la naturaleza de los valores que expresan**: Es una variable activa, por tratarse de un método de enseñanza.

-) **Según la posición de la característica**: Es una variable categórica o teórica.

-) **Según el método de medición de las variables**: Variable cualitativa.

-) **Según el número de valores que adquiere**: Variable dicotómica.

<u>Rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas</u>.

-) **Según la función que cumple en la estructura de hipótesis**: Variable dependiente.

-) **Según la naturaleza de los valores que expresan**: Es una variable atributiva, por tratarse de un resultado académico.

-) **Según la posición de la característica**: Es una variable continua.

-) **Según el método de medición de las variables**: Variable cuantitativa.

-) **Según el número de valores que adquiere**: Variable politómica.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. RETROSPECTIVA HISTÓRICA DE LA ENSEÑANZA PERSONALIZADA

Época Griega: Las tentativas por individualizar la enseñanza se remontan en sus orígenes a Sócrates; para él, el alumno era agente de su propio aprendizaje, el preguntar daba realce a la ubicación de ambos actores del fenómeno. A partir de entonces surgió una nueva filosofía del método: la escuela platónica y la aristotélica. Los platónicos parten de lo general (los principios) para llegar a lo particular (los ejemplos), por el camino de la deducción. Por el contrario, la metodología aristotélica, inductiva y experimental va de lo particular a lo general.

Edad Media: Santo Tomás, en su obra "*De Magistro*", relaciona los principios aristotélicos con una situación (profesor-alumno-aprendizaje). La causa material es considerada como la maleabilidad del alumno; la causa formal como el carácter ponderado que debe resultar; la causa eficiente, como un autodesarrollo y la causa final, como un ideal sobre el que trabajan maestro y alumno. En "*De Magistro*", Santo Tomás pregunta: ¿En qué medida un hombre puede enseñar a otro hombre?, esta interrogante permita la deducción de dos principios:

- *El maestro es sólo un agente intrínseco y próximo, puesto que el desarrollo intelectual del alumno sólo se concreta verdaderamente por su autodesarrollo.*
- *El método de la instrucción es superior al método del descubrimiento sólo porque significa un mero atajo del proceso.*

Los intentos por individualizar la enseñanza adquieren un carácter sistémico de investigación a partir de Dewey (1859-1952), que se constituye en el iniciador del movimiento activista en educación. Desarrolla su teoría en tres principios fundamentales:

- *La educación tiene como centro de interés la experiencia; que es fundamental tanto para el educador, porque debe adaptarse al alumno, como para el alumno, porque aspira a obtener un verdadero crecimiento.*

- *La educación debe ser activa, ya que el alumno es eminentemente activo y necesita desarrollarse espontáneamente, sin que entorpezca su crecimiento.*

- *La educación debe ser democrática, a través de un método que favorezca el trabajo mancomunado.*

Edward Claparede (1873-1940), *creador de los principios que sustentan la educación funcional, orienta su metodología hacia los intereses profundos del alumno; ve la escuela como un vasto laboratorio donde el alumno actúa dinámicamente en su propia educación y el profesor, como un colaborador y estimulador de intereses útiles.*

Olvide Decroly (1871-1932), pedagogo belga, apoya toda su experiencia en las observaciones realizadas sobre la espontaneidad del alumno y sobre la manera como comienza a estructurarse el conocimiento.

Maria Montessori (1970-1952), abre una nueva perspectiva en cuanto a la capacidad de los alumnos y los métodos didácticos empleados en el salón de clase. Se da importancia a la individualidad de los alumnos y a la influencia que sobre ellos tienen los aspectos físicos y psicológicos del ambiente, la cual ayuda a desarrollar una disciplina interior.

También en Francia, el método del padre Faure de reciente aparición, consiste en la enseñanza individualizada mediante técnicas de fichas y por unidades de enseñanza, cuyo estudio se lleva en orden lógico, estas fichas pueden ser de tres tipos: fichas de nociones (en la que figura las nociones básicas del tema a desarrollar); fichas de ejercicios (que contienen los problemas específicos) de cada contenido con una graduación progresiva en cuanto a dificultad. A medida que el alumno va resolviendo un ejercicio, pasa al siguiente; es él mismo quien verifica si está correctamente resuelto o no, por medio de las fichas de corrección.

1.2. TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN AFINES

En el proceso de estudio, se han encontrado trabajos vinculados al uso de medios y materiales con la finalidad de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel secundario.

En las bibliotecas de las universidades Mayor de San Marcos, Pontificia Universidad Católica del Perú, "Hermilio Valdizán" de Huánuco y de Educación "Enrique Guzmán y Valle", no existen trabajos específicos referidos al tema realizados en los últimos años; pero, si existen muchas referido a la enseñanza modular, enseñanza programada, módulos autoinstructivos y autoeducativos; asimismo existen textos sobre enseñanza personalizada y la serie de textos sobre "Educación Personalizada" dirigida por García Hoz. Asimismo, existen trabajos de investigación cuyos aportes metodológicos y de tratamiento estadístico tiene alguna relación con los de la presente investigación, los mismos que detallamos a continuación:

♦ LLANOS, Rosa (1997) realizó una tesis de tipo educacional tecnológica, titulado "*La Enseñanza Personalizada a través de Módulos Autoeducativos y el Rendimiento Académico en Matemática en los Estudiantes de la Universidad del Santa*", para optar el grado de Magíster en Educación con mención en Didáctica Universitaria de la Universidad Nacional de Educación. Plantea que la Enseñanza Personalizada, realizada a través de Modelos Educativos, contribuye a un mejor rendimiento académico de los estudiantes de los primeros ciclos de ingeniería de la Universidad de Santa, en la asignatura de matemática.

Se propone lograr, a través de la investigación experimental, procedimientos de enseñanza y materiales educativos que posibiliten una dirección del aprendizaje más ventajosa y que el aprendizaje de la matemática se incrementa cuando se ha aplicado la enseñanza personalizada a través de "modelos autoeducativos", que influye positivamente en el rendimiento académico.

♦ ZENTENO RUIZ, Armando (1999) "*Modelo de Enseñanza Aprendizaje de Relación Binaria para el Segundo Grado de Educación Secundaria*", tesis de Magíster en Enseñanza de la Matemática, PUCP. Es un estudio cuasi-experimental, donde plantea elaborar un modelo de enseñanza para mejorar el aprendizaje de las relaciones binarias en alumnos del Segundo Grado de Educación Secundaria de los colegios estatales de Ciencias y Humanidades de la ciudad de Cerro de Pasco, considerando el entorno social del alumno y los modos activo, icónico y simbólico. Entre sus conclusiones considera que *"los resultados que se obtuvieron de la enseñanza aprendizaje de la relación binaria y sus temas específicos bajo la metodología y el contenido propuesto, son significativos en comparación al proceso usual; con predominancia del razonamiento intuitivo sobre lo memorístico, la metodología inductiva frente a la deductiva, el aprendizaje concreto frente al abstracto, en contextos reales".*

- SULCA ARBAIZA, Arturo (2000) *"Uso de la regla y el compás para la enseñanza aprendizaje de la Matemática en Educación Secundaria",* tesis de Magíster en Educación con mención en Enseñanza de la Matemática, PUCP. Sostiene que el uso de la regla y el compás durante las sesiones de clase, elevan el rendimiento de los alumnos en el dominio cognoscitivo de algunos temas de la Matemática en la Educación Secundaria. Del proceso experimental que realiza con alumnos del cuarto grado de secundaria, confirma significativamente su planteamiento y concluye que *"El uso de la regla y compás en la solución de problemas geométricos hace que el alumno tenga mayor preocupación por el aprendizaje comprensivo, es decir, las construcciones motivan el trabajo escolar. El solo hecho de estar manipulando objetos con la regla y el compás o las escuadras nos conducen a concentrarnos, y su uso adecuado nos permite deducir y verificar sus propiedades".*

- FLORES CUBAS, Milusca (*2000*) "*Enseñanza de las Funciones Reales de Variable Real en el Tercer Año de Educación secundaria*", tesis de Magíster en Enseñanza de la Matemática, PUCP. Aborda el problema de la enseñanza de las funciones reales en el rendimiento escolar de los alumnos del tercer año de Educación Secundaria del Colegio Nacional "José Leonardo Ortiz" de Chiclayo, a través de un módulo autodidáctico. De sus resultados concluye que la aplicación del módulo Autoinstructivo sobre funciones reales es un estímulo de aprendizaje eficaz. Permite un mayor rendimiento. Además, la utilización del Módulo Autodidáctico ha permitido un trato personal con el estudiante, observando su avance, dificultades y orientado para superarlos, que conlleva a mayor comunicación entre profesor y alumno.

- GONZÁLES MIÑÁN, Milagros (2003) *"La orientación personalizada desde el área personal social para el desarrollo de valores en el alumno del segundo ciclo de* *educación primaria a través de la aplicación de estrategias de clarificación de valores",* tesis de Licenciado en Educación, PUCP. Aborda el problema del desarrollo de valores en los niños de primaria. De su investigación concluye que dentro del plan de orientación personalizada se posibilitan espacios para que los alumnos refuercen constantemente las estrategias, se evalúan así mismos (autoevaluación) y a sus compañeros (coevaluación) en lo referente a su desempeño y participación de cada uno de ellos.

♦ CABALLERO SOTO, Ana (2005) "*Propuesta metodológica centrada en la literatura y fundamentada en el enfoque de educación personalizada dirigida a los asistentes educativos que enseñan a niños y adolescentes enfermos de cáncer*", tesis de Licenciado en Educación, PUCP. Aborda el problema del tratamiento personalizado que reciben los niños y adolescentes atacados por el cáncer. De sus resultados concluyen que la enseñanza personalizada es un punto esencial de la propuesta metodológica, estimula la capacidad de imaginar, de idear otro mundo posible para sí mismo y para los demás. Permite enfocar de otra manera las situaciones que nos abruman y así idear alternativas.

♦ DIONISIO GARMA, Máximo (2006) "*El método heurístico para la enseñanza-aprendizaje de la matemática básica a nivel universitario*", tesis Doctoral en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Educación. Trabajo experimental con pre y posprueba de grupos aleatorizados, realizada en la Universidad Nacional Agraria de la Selva de Tingo María, durante el mes de mayo del 2004, considerando como población de estudio a los alumnos matriculados en el curso de Matemática Básica donde puso en práctica la enseñanza de Ecuaciones e Inecuaciones mediante el método Heurístico. En cuya conclusión, *se establece la eficacia del método heurístico y plantea su implementación como método de enseñanza en el sistema universitario, primariamente en la asignatura de Matemática Básica de la Universidad Nacional Agraria de la Selva de Tingo María. Mediante este método el estudiante ejercita sus facultades mentales, alimentando sus iniciativas personales y desenvolviendo su espíritu de investigación, con relación a los métodos de enseñanza tradicionales utilizados por los docentes.*

2. BASES TEÓRICAS

2.1 PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

La enseñanza y el aprendizaje constituyen una unidad y son elementos conexos en todo acto educativo para la plasmación de una educación acorde a sus fines y orientaciones, sustentadas en objetivos y programas, contenidos y métodos. Según Fernández (1979, p.29) *"El aprendizaje es el correlativo lógico de la enseñanza, tarea que corresponde al docente y supone un cambio en la disposición o capacidad humana, con carácter de relativa permanencia, y que no es atribuible simplemente al proceso de desarrollo. Sólo en el plano teórico se pueden superarse ambos procesos: enseñanza y aprendizaje. Los dos vienen a significar las fases de la instrucción".*

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje, los trabajos didácticos y las actividades de aprendizaje sistematizados se convierten en modos, formas, medios, procedimientos y métodos que llevan al logro de aprendizaje; convirtiéndose en experiencias de aprendizaje significativos y satisfacen los objetivos y contenidos programáticos, congruentes con: los objetivos propuestos, el nivel de madurez de los alumnos, los intereses del grupo y, la necesidad de promover nuevos aprendizajes (Valiente, 2000).

2.1.1. El Aprendizaje

Según lo expresado por Ausubel/Novak/Hanesian (1998), históricamente pueden considerarse, en forma amplia y de manera resumida, tres periodos que dan cuenta de cómo ha sido considerada en estas ideas centrales por sus representantes y sus teorías acerca del proceso de aprendizaje:

De 1850 a 1900 en la Escuela Instruccional, se pone énfasis en los contenidos para lograr motivar en el alumno el aprendizaje, descuidando el desarrollo de la capacidad intelectiva y los desempeños reflejados en actitudes.

En la Escuela Tradicional de Transmisión-Asimilación de Conocimientos, pone énfasis en los contenidos entregados con un fin pragmático, esto es, para ser aplicados en la vida práctica. En el área actitudinal se descuidaron los intereses y necesidades de los estudiantes. Sus representantes más notables fueron: J.B. Salle, J.A. Commenius, J.J. Rousseau y J. H. Pestalozzi.

De 1901 a 1950 surgen dos escuelas y dos líneas teóricas que marcan el periodo:

a) **Escuela Activa** (Centros de Interés, Escuela Nueva, Escuela Sensual Empirista, Escuela Lúdica), donde priorizan las necesidades del entorno y del educando, a éste se le preparara para el oficio y el desempeño eficiente, educación actitudinal, pero se descuida el contenido del aprendizaje. Algunos de sus más destacados representanes: O. Decroly, J. Dewey, E. Claparede, G. Kerchensteiner.

b) **Escuela Conductista,** que procura motivar al estudiante, canalizando su interés a través de estímulos, para que aprenda los contenidos conceptúales; pero se descuidaron las habilidades, las destrezas y la capacidad de hacer algo. Representantes: B.F. Skinner, B. Bloom, A. Bandura.

De 1950 a 2000 se tiene nuevos enfoques pedagógicos

a) **Escuelas Cognitivas**, donde el núcleo del hacer pedagógico está puesto en los proceso de pensamiento más que en los contenidos los cuales se descuidan por buscar la motivación hacia el aprendizaje. Precursores: J. Piaget, J. Bruner. R. Gagné, Briggs, H. Aebli, entre otros.

b) **Escuela Constructivista y Escuela Postconstructivista**, donde se hace hincapié en el desarrollo de los procesos de pensamiento para modelar actitudes en pro de la construcción de conocimientos, no obstante, el maestro es quién decide cuales son los contenidos, los métodos y las estrategias a seguir, descuidando en parte los intereses y actitudes de los estudiantes.

Resumiendo, se tiene:

Periodo	**Escuela con Pedagogía de tipo**	**Énfasis que se da en el aprendizaje en la escuela.**	**Objetivos a lograr en el educando (aprendiz)**	**Lo que se descuidó o minimizó teóricamente**
1850 a 1900	Instruccional	Contenidos	Actitudes	Actitudes
	Transmisión – Asimilación	Contenidos	Actitudes	Actitudes
1901 a 1950	Activa	Actitudes	Actitudes	Contenidos
	Conductista	Actitudes	Contenidos	Actitudes
1950 a 2003	Cognitiva	Actitudes	Actitudes	Contenidos
	Constructivista	Actitudes	Contenidos	Actitudes

FUENTE: Cuadro resumen de perspectiva histórica de las escuelas Pedagógias (elaborado por CASANUEVA, Patricio)

En el plano de desarrollo profesional del docente actual, son las posiciones constructivistas las que más interesan estudiar y aplicar, porque propician y generan aprendizajes significativos en el estudiante (Ausubel 1990). Siendo novedoso volver a re-estudiar a Piaget, re-encontrarse con Skinner, Bandura, Gagné y Bloom, empezar a conocer más de cerca de Vygotsky y seguir estudiando a Novak, Gowin y a Ausubel.

El constructivismo pedagógico está centrado en la persona y en sus experiencias previas, a partir de las cuales ésta realiza nuevas construcciones mentales. Tomamos como referencia de este modelo a tres pensadores: Piaget, Vygotsky y Ausubel.

Teórico	Constructivismo	Núcleo de Desarrollo	Aprendizaje
Piaget	Genético	La persona El individuo	Por equilibración (Asimilación-Acomodación)
Vygotsky	Social	Lo social El hombre colectivo	Por interacción ZDP
Ausubel	Disciplinario	Lo actitudinal Disciplina	Significativo Experiencias previas

FUENTE: Cuadro resumen de perspectiva histórica de constructivismo (elaborado por CASANUEVA, Patricio)

Este modelo considera que la construcción del conocimiento se produce:

i) Para Piaget y el Constructivismo Genético:

El conocimiento se construye mediante la interacción con los objetivos circundantes, generándose el desarrollo individual hacia las operaciones lógicas y formales y de la inteligencia. Aprender y enseñar es trabajar con los esquemas, puede haber esquemas manipulativos y representativos, esto se ve prácticamente en que los niños aprenden nuevos esquemas y afianzan los que ya tienen, esto último está en relación con los conceptos de asimilación y acomodación, mecanismos básicos del funcionamiento de la inteligencia.

ii) Para Vygotsky y el Constructivismo Social:

El aprendizaje se realiza en interacción con otros. La premisa básica de esta interacción está dada por la siguiente expresión; detrás de cada sujeto que aprende hay un sujeto que piensa. Para ayudar al alumno debemos acercanos a su “zona de desarrollo próximo”, partiendo de lo que ya sabe. El ser humano es una consecuencia de su contexto. La enseñanza debe estar guiada por un énfasis constructivista en los actos del habla, el aprendizaje y maduración de los procesos psicológicos superiores como el lenguaje y sus expresiones -desarrollo de ideas que luego se internalizanimplican un intercambio compartido de aceptaciones y rechazos de las mismas, hecho que se desarrolla necesariamente en contacto con otros.

iii) Para Ausubel y el Constructivismo Disciplinario

Ninguna tendencia o teoría pedagógica cumple a cabalidad las exigencias ideales del aprendizaje por la complejidad del mismo proceso, no obstante, una selección sincrética centrada en el **aprendizaje significativo** da luz acerca de los logros y metas a cumplir por los alumnos. Dentro de ellas, la teoría de Ausubel es interesante para llevar a la práctica la elaboración de módulos didácticos.

Teniendo en cuenta los autores mencionados, en la consecución del trabajo, se conjugan los paradigmas establecidos por las tres escuelas: **Activa** por su énfasis en el saber hacer, en tanto permite desarrollar el actuar, el estar ocupado y el aprender a convivir. **Lúdica** por su énfasis en el ser, el trabajar con los sentimientos, con el querer ser de la persona y lograr descubrir la vocación, explorar una forma de aprender a vivir, en síntesis, la formación del aprendiz y **Constructivista** por su énfasis en el saber, en los contenidos curriculares que permiten desarrollar el acto de pensar, la tarea de investigar y autoevaluar el aprendizaje y finalmente como consecuencia aprender a aprender.

2.1.2. Aprendizaje Significativo

Este tipo de aprendizaje busca que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo a la autonomía, al momento de pensar de modo tal que desarrolle su inteligencia relacionando de manera integral lo que tiene y lo que conoce, respecto a lo que quiere aprender.

"*La teoría de aprendizaje significativo es una introducción a la psicología de aprendizaje en salón de clases, que se preocupa principalmente del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de estructuras de significados en el alumno. El principio básico de esta teoría, reside en la afirmación de que las ideas expresadas simbólicamente, van relacionados de manera sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por eso, la recomendación ausubeliana se basa en averiguar primero, lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia*" (Ausubel, Novak & Hannesian, 1998, p.27)

Para Ausubel (1990) la teoría del "*Aprendizaje significativo*" se da como contraposición al "*Aprendizaje memorístico*" y, aunque sus aportaciones y terminología se consideran en muchos entornos ya antiguas, que clarifican muchos de los conceptos que normalmente se utilizan; además, sólo desde una aproximación consciente a su origen es posible entender el desarrollo y la integración del modelo constructivista. Este tipo de aprendizaje centra su atención en los conceptos y en el aprendizaje proposicional como base sobre la que los individuos construyen sus significados propios.

El aprendizaje significativo se produce cuando los nuevos conocimientos se dan o se construyen en base a lo que el alumno conoce (conocimientos previos) que sirve de base para ampliar el edificio cognitivo; y, se logra cuando la adquisición de los nuevos conocimientos encajan fácilmente en la estructura cognitiva del alumno, conectando e integrando los conocimientos previos con los nuevos, en un entorno de permanente motivación.

Ventajas del Aprendizaje Significativo

- Produce una retención más duradera de la información. La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido, permite explicarlos y aplicarlos.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno.
- Es personal, ya que la significación del aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

Aplicaciones pedagógicas

- El maestro debe conocer los conocimientos previos del alumno, es decir, se debe asegurar, que el contenido a presentar pueda relacionarse con las ideas previas o requisitos, ya que el conocer lo que sabe el alumno ayuda a la hora de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Organizar los materiales en el aula de manera lógica y jerárquica, teniendo en cuenta que no sólo importa el contenido sino la forma en que se presenta a los alumnos.

- Considerar la motivación como un factor fundamental para que el alumno se interese por aprender, ya que el hecho de que el alumno se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender.

- El maestro debe saber utilizar ejemplos: por medio de dibujos, diagramas o fotografías, se enseñan los conceptos.

Para el aprendizaje significativo, es necesario conocer las estrategias didácticas para manipular los recursos con eficacia. Para potenciar el aprendizaje a largo plazo conviene usar los recursos didácticos, conectados e integrados dentro de la estructura de la unidad didáctica o bloque de trabajo. Por lo tanto, los recursos tienen que estar conectados con la estructura conceptual del tema trabajado, por ejemplo, mediante un mapa conceptual, adecuadamente construido para potenciar el aprendizaje de un tema.

Para la matemática este tipo de aprendizaje representa un modo eficaz para lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente en base a las experiencias del alumno. Ello significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático el docente debe explorar lo que el alumno conoce sobre el tema, sólo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a sus estructuras cognitivas.

2.1.3. La enseñanza personalizada

La enseñanza es el acto de dirigir la transferencia de conocimientos con técnicas y procedimientos apropiados durante el proceso de aprendizaje de los alumnos, que suministra conocimientos y asume funciones de:

- Cuidar los aspectos formativos, que es lo esencial en el desenvolvimiento de la persona humana.

- El alumno debe participar en forma activa en sus acciones y reacciones, y al mismo tiempo la enseñanza debe adaptarse al interés y a las condiciones psíquicas del educando.

- Dirigir a los alumnos hacia el conocimiento de la realidad a través del análisis consciente de los diversos problemas que se suscitan.

- No descuidar el aspecto social del alumno, haciendo del lugar de estudios el sitio de encuentro personal y humano.

La enseñanza personalizada responde al intento de estimular al estudiante para que vaya perfeccionando la capacidad de dirigir su propio aprendizaje o, dicho de otro modo, desarrollar su capacidad de hacer efectiva la libertad personal, participando con sus características peculiares en el proceso de enseñanza-aprendizaje. "*El significado de la enseñanza personalizada no se haya en ser una forma o método nuevo de enseñanza más eficaz, sino en convertir el trabajo de aprendizaje en un elemento de formación personal a través de la elección de trabajos y la aceptación de responsabilidades por parte del alumno*" (García Hoz, 1985, p.24).

La enseñanza personalizada se apoya en la consideración del alumno como persona y no sólo como organismo que reacciona ante estímulos, sino como un ser escudriñador y activo que explora y fortalece su estructura cognitiva. De otra parte, la enseñanza personalizada ofrece la posibilidad de atención constante a las dificultades y posibilidades especiales de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. La enseñanza colectiva ofrece posibilidades de cooperación en los alumnos y maestros, permitiendo economizar tiempo y esfuerzo. A partir de esta concepción, *la enseñanza personalizada*, aprovecha las posibilidades que ofrece cada una de dichas modalidades educativas y se orienta a fortalecer interiormente a la persona para hacer más eficaz y eficientes. En este sentido se habla actualmente de *educación personalizada*.

Un sistema de enseñanza personalizada esta orientado a la formación del alumno en todas sus dimensiones esenciales, conducente al aprendizaje significativo, individuales o grupales, situación que se produce con frecuencia; ello exige cierto grado de vivacidad y numerosas competencias particulares, para que el proceso constructivo del alumno resulte eficaz (UNESCO, 1994). Para que el aprendizaje sea efectivo, es necesario que los conocimientos impartidos encajen a las características individuales del alumno, teniendo en cuenta sus esquemas previos del conocimiento, para modificar esos esquemas en la dirección adecuada (De Guzmán, 1993). Por ello, en todo el proceso de enseñanza es preciso planificar con antelación: los instrumentos, la organización del aula, agrupamientos, elección y secuenciación de contenidos, etc.

La enseñanza personalizada se apoya en la consideración del estudiante como persona con potencialidades para explorar, cambiar y transformar sus esquemas mentales. Las características esenciales incluidas en el concepto de persona de las que se derivan las orientaciones para ofrecer una enseñanza personalizada son: singularidad-originalidad-creatividad, autonomía-libertad-responsabilidad, apertura-comunicación y trascendencia.

2.1.4. Principios de la Enseñanza personalizada

El más profundo sentido de la enseñanza personalizada se halla en convertir el aprendizaje en un elemento de formación personal a través de la aceptación de responsabilidades por parte del escolar como ser original y creativo, con capacidad para autogobernarse, establecer relaciones y buscar sentido a su vida.

La enseñanza personalizada como elemento fundamental de la educación personalizada, se funda en los principios de:

Singularidad - Creatividad

La enseñanza personalizada se presenta como instrumento de educación integral en su significación profunda, como enriquecimiento y unificación del ser y de la vida humana. "*Desde el punto de vista de la singularidad personal, el objetivo de la enseñanza es hacer al sujeto consciente de sus propias posibilidades y de sus propias limitaciones, cuantitativa y cualitativamente consideradas*" (García Hoz, 1985, p.27).

El objetivo de la educación desde la singularidad personal, es hacer al alumno consciente de sus propias potencialidades, oportunidades y limitaciones. Y cómo la vida de las personas se realiza no sólo en su interior, sino también en relación con el otro y con el mundo que le rodea, es necesario una mediación pedagógica que oriente el proceso de reflexión en relación con su visión de la vida y sus aspiraciones hacia el desarrollo de la vida y hacia lo trascendente. A la vez el maestro puede orientar la construcción del conocimiento atendiendo a las diferencias individuales.

La creatividad se manifiesta en la solución nueva de un problema fáctico o de expresión, se infiere que sólo a merced a su capacidad creadora el alumno es capaz de progreso. El desarrollo de la originalidad o de la capacidad creativa es también un principio unificador del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Autonomía-libertad

Autonomía es la capacidad de pensar por sí mismo, tomar decisiones libres y responsables a partir de procesos de reflexión crítica y de confrontación sustentada. La persona libre y responsable enfrenta su realidad con juicio crítico, toma decisiones y asume riesgos de las consecuencias de sus actos. La máxima expresión de la autonomía es el uso de la libertad en forma responsable. Esto es, entender la autonomía como la capacidad para gobernarse a sí mismo, saber aprovechar las posibilidades y oportunidades de obrar libremente. De igual manera, la máxima expresión de la libertad tiene su significado en la independencia, en la capacidad de autodeterminarse, y en elegir en cada momento de manera consciente y reflexiva el mejor modo de actuar entre las diferentes opciones.

La educación personalizada considera que el ser humano no sólo es libre sino que además debe estar consciente de esta libertad, y de que esto implica que posee la capacidad y necesidad de comprometerse con lo que elija. En pedagogía esto significará que al alumno se le educará su capacidad de tomar decisiones y de actuar siguiendo una elección personal y no de acuerdo a una obligación ciega. Asimismo, la autonomía implica que es necesario que el alumno entienda con claridad la finalidad que persigue cada actividad y que tenga un rol activo en la planificación de su propia educación.

La autonomía-libertad es aspecto fundamental en la formación del alumno, requiere de maestros con mentalidades abiertas para asimilar los cambios y modalidades educativas que con alguna frecuencia se presentan, con metodologías creativas e innovadoras mediadoras en los procesos de aprendizaje para lograr el desarrollo armónico y permanente de la persona, que apoye en la formación de la autonomía propicia en los estudiantes el desarrollo de capacidades de reflexión, interpretación, argumentación y proposición, como competencias fundamentales en el proceso de resolución de problemas, conflictos y toma de decisiones.

Apertura - Comunicación.

La apertura es la disposición personal que permite al ser humano abrirse así mismo y al otro en un proceso de comunicación a través de un lenguaje. La persona va construyendo su historia en el encuentro con el otro, permitiéndole a ese otro ser él mismo en una relación de libertad y aceptación. En este contexto García Hoz expresa (1988): *"Toda relación humana es comunicación, toda comunicación requiere capacidad expresiva y comprensiva por parte del comunicante, de donde claramente se infiere que la comunicación personalizada, en la medida que responde a la persona, desemboca en el desenvolvimiento de la capacidad comunicativa".*

La comunicación es la capacidad que tiene el ser humano de conversar con el otro. Para Humberto Maturana (1997), todo quehacer humano se desarrolla en el conversar y todas las actividades humanas se dan como distintos sistemas de conversaciones. En la conversación comienza el respeto al otro, y la legitimidad de uno mismo. La enseñanza personalizada surge de la consideración del hombre persona, su carácter de sujeto activo frente a un mundo de realidades objetivas, respecto del cual ocupa un plano de superior dignidad y cuya vida es plenamente humana, auténtica, sólo mediante el ejercicio de su libertad.

2.1.5. Metodología personalizada

A través de la enseñanza personalizada se pretende atender a la diversidad desde el trabajo común del día a día en medio del grupo, para esto se debe tener presente de manera habitual que los alumnos presentan notables diferencias en:

- Parte de creer en el estudiante como una persona original, creativa, única e irrepetible con posibilidades, con capacidad de autogobernarse, de entablar relaciones y con el deseo de darle sentido a su vida. La finalidad de la metodología personalizante es servir de guía y orientación al desarrollo de la personalidad de los estudiantes.
- Para lograr la personalidad y aprender se requiere de un maestro que en su quehacer educativo involucre acciones metodológicas como las siguientes:
  - -) Fomentar el diálogo, propiciar la participación democrática, la toma de decisiones, el trabajo en equipo, la búsqueda de la verdad en forma participativa.
  - -) Establecer una relación de comprensión y empatía con los estudiantes a nivel individual y grupal.

-) Reconocer y valorar las potencialidades de los estudiantes como seres humanos identificando los talentos que hay en cada uno de ellos para propiciar su desarrollo. Toda institución educativa debe ser una escuela de talentos donde cada uno descubra y desarrolle de manera óptima sus posibilidades.

-) Involucrar al estudiante en forma activa y responsable en la construcción del conocimiento mediante un plan de trabajo y unos objetivos claros y precisos.

-) Hacer uso de la tecnología educativa para ayudar en la orientación y desenvolvimiento del proceso de humanizar y personalizar la educación.

-) Crecer en armonía con la comunidad educativa en los valores y características que propone la educación personalizada.

-) Fomentar desde las distintas disciplinas del conocimiento una cultura centrada en los valores, que unifique las mentalidades científicas, técnicas y humanísticas que se dan en el establecimiento educativo y en la sociedad en general.

-) Facilitar aprendizajes pertinentes enfocados al desarrollo humano con la finalidad de lograr los cambios en la educación como exige la sociedad actual.

-) Conocer y respetar los estilos y ritmos de aprendizajes de cada estudiante.

-) Basar la orientación del aprendizaje en el desarrollo de las potencialidades y no en las limitaciones de los estudiantes.

-) Reconocer y aceptar que cada estudiante tiene talentos y posibilidades y por lo tanto es capaz de aprender, sólo necesita un adulto mediador que lo acompañe a encontrar el método apropiado a sus características cognitivas y emocionales para seguir él solo en el aprender a aprender.

-) Construir espacios de reflexión para analizar las conductas negativas y convertirlas en oportunidades de crecimiento personal en donde el estudiante asume su compromiso de cambio como su mejor opción de vida. La educación personalizada conduce a la superación del castigo, el miedo, el temor, la angustia y el deseo de complacer al otro en su afán de ser reconocido. Permite el desarrollo de seres auténticos.

-) Posibilitar en cada estudiante el autoconocimiento de sus posibilidades, ritmos, estilos, formas y procesos de aprendizaje, base importante en su autorrealización.

-) Establecer conversación permanente con los estudiantes como proceso válido para el aprendizaje de los diferentes saberes y la construcción de un proyecto que de sentido a su vida.

2.1.6. Evaluación de la enseñanza-aprendizaje.

Es un momento especialmente relevante del proceso enseñanza-aprendizaje consistente en la valoración de la tarea educativa sobre la base de determinados objetivos previstos con la finalidad de optimizar el proceso y poder conocer los aciertos y errores del proceso en su conjunto.

Según Llinares (1990, p.184) *"La evaluación permite al alumno orientarse sobre cómo está estudiando y cómo va aprendiendo, le sirve para saber cuanto le falta aún y qué puntos debe repasar. Es una función orientadora, que también le servirá para ubicarse dentro del grupo, es decir, si se reconoce como porte de los estudiantes a quienes les sale todo bien, los que no hacen nada, o los que se equivocan y reparan el error. Esta posibilidad de autoevaluarse, no con el patrón del profesor, sino el de sus propios compañeros, es la prueba de autocrítica con respecto a su compromiso con el aprendizaje*".

Para Pérez & García (1989), evaluar es el acto de valorar la realidad educativa, que forma parte de un proceso cuyos momentos previos son los de fijación de características de la realidad a valorar, y de recolección de información sobre las mismas, y cuyas etapas posteriores son la información y la toma de decisiones en función del juicio del valor emitido.

Según Delgado, K. (2004, p.51) "*La evaluación valora críticamente los logros de la acción educativa y los factores que influyen en ella. Para esto recoge información sobre el proceso educativo antes, durante y después de su desarrollo, con la finalidad de mejorarlo y ayudar en el aprendizaje de los estudiantes; es decir, evaluar el aprendizaje significa valorar a la persona y el esfuerzo que haga por aprender".* La evaluación debe orientar el trabajo docente como el que realizan los estudiantes, con la esperanza de lograr el pleno aprendizaje en todos y no sólo en algunos; interesando no sólo los resultados, sino también el proceso que lleva hacia ellos, la socialización del aprendizaje, la capacidad organizativa de los grupos de investigación y la auto interevaluación.

De Guzmán (1993) expresa que la evaluación es un instrumento eficaz y favorecedor del proceso enseñanza-aprendizaje y que permite:

- Impulsar el trabajo diario y comunicar seguridad en el propio esfuerzo;
- Dar información al profesor y a los alumnos sobre los conocimientos que se poseen, sobre las deficiencias que se hayan producido, haciendo posible la incidencia inmediata sobre las mismas y sobre los progresos realizados, en los distintos aspectos y crear expectativas positivas;
- Reunir un número elevado de resultados de cada alumno, reduciendo sensiblemente la aleatoriedad de una valoración única.

Según Casanova (1999, p.60) evaluación educativa es "*un proceso sistemático y riguroso de recogida de datos, incorporando al proceso educativo desde el comienzo, de manera que sea posible de disponer de información continua y significativa para conocer la situación, formar juicios de valor respecto a ella y tomar las decisiones adecuadas para proseguir la actividad educativa mejorándola progresivamente*".

Siendo la evaluación un momento relevante del proceso enseñanza-aprendizaje, orientado a regular las actividades del profesor, alumno, materiales y la institución escolar; se da a través de siete etapas consistente en:

a) Especificar las decisiones a tomar y los juicios a emitir,
b) Describir la información necesaria;
c) Plantear la obtención de la información;
d) Obtener, analizar y registrar información;
e) Formular juicios,
f) Tomar decisiones; y
g) Resumir y dar a conocer los resultados de la evaluación. (Wenzelburger, 1995).

El proceso de enseñanza-aprendizaje incluye implícitamente a la evaluación inicial, procesual y final en la medida en que ésta se vaya haciéndose explícito a través de aplicación de instrumentos, el interés en él llevará a profundizar lo que es la evaluación y como mejorarla, de la misma forma que se hace con la enseñanza y el aprendizaje (Díaz, 1995); así, la evaluación es un instrumento de seguimiento y mejora del proceso y una actividad colectiva por excelencia, donde los estudiantes tienen la ocasión de discutir aspectos como el ritmo en que el profesor imprime el trabajo o la manera de dirigirse a ellos, y sus propias actitudes y logros.

2.1.7. Modelos de evaluación

a) Por su objetivo:

La evaluación cuantitativa (Stuffelbeam, 1973) centra su atención en la evaluación de objetivos establecidos a priori y que sirven para decidir en qué grado han alcanzado los alumnos los objetivos propuestos. Los objetivos han de estar formulados como conductas observables, a fin de medir los resultados obtenidos en el sistema vigesimal o cualquier otro de tipo numérico, para clasificar a los estudiantes según los resultados del rendimiento final.

La evaluación cualitativa propone modalidades como la evaluación global que comprende la evaluación del alumnado junto con el trabajo del profesorado, la organización del centro escolar, la metodología y el propio currículo. El modelo cualitativo aporta las siguientes ventajas:

- Valora todo el proceso seguido por el alumnado, de modo que las conclusiones a las que se lleguen puedan mejorar el currículo y, por tanto, el rendimiento de los alumnos.
- Los criterios a utilizar no sólo se refieren a las competencias fijadas, sino a cualquier otra circunstancia que se presente durante el desarrollo del currículo, lo que implica una permanente recogida de datos.
- Proporciona información al alumnado para mejorar el conocimiento que tiene de sí mismo y de su trabajo.
- Adopta una escala de calificación que utiliza las letras A, B y C, que el aprendizaje está logrado, que está en proceso o que puede encontrarse al inicio, respectivamente.

b) Por su pauta:

La evaluación normativa: consiste en comparar el resultado del individuo con los resultados de una población o grupo a los que pertenece. Esto exige el establecimiento de una norma o escala de referencia, confeccionada después de estudios estadísticos de rendimiento, con el objetivo de obtener una calificación. En este ámbito normativo, el criterio es externo, en la medida que se utiliza una escala que es más o menos "ajena" al sujeto evaluado, sin tener en cuenta las condiciones de trabajo, nivel inicial de aprendizaje, etc. Se utiliza para ubicar a los alumnos en escalas de rendimiento y puntaje, atribuir un lugar dentro de los grupos, certificar los niveles en función de la norma o el grupo y predecir futuros resultados (B. Macario).

La evaluación criterial: Evaluar en referencia a un criterio, busca la comparación del alumno con sus propios rendimientos o resultados, en las mismas pruebas o en relación a un criterio fijado de antemano. Se valora principalmente el progreso realizado por el alumno, independientemente de escalas. Se evalúa el avance del alumno hacia el objetivo propuesto y la distancia que lo separa de él. Esta distancia constituyen las bases de la información a partir de la cual se ha de tomar una decisión. Esto nos aproxima a una "*pedagogía por objetivos"*, donde existe una necesidad de expresar los objetivos en términos operativos (el alumno será capaz de ...), luego de haber analizado las necesidades y posibilidades del alumno o grupo.

"*El docente deberá determinar el nivel mínimo deseable de las aptitudes que deben adquirir todos los alumnos... y la evaluación de los resultados; con relación a los objetivos por alcanzar y a partir de la situación inicial; reunirá la noción de evolución y la participación de él o los alumnos"* (B Macario). Las funciones que cumplen este tipo de evaluación son: establecer un balance con los objetivos propuestos, realizar un diagnóstico de las dificultades y determinar si la estrategia es o no pertinente.

c) Por el agente evaluador:

Pueden ser, cuando el sujeto se evalúa a si mismo (autoevaluación), cuando el docente evalúa a los alumnos (heteroevaluación), cuando se evalúan unos a otros en la clase (coevaluación o interevaluación) y, como una variante de ésta última es la evaluación del alumno y los padres de familia al profesor.

Modelos de evaluación		
Por su objetivo	Cuantitativa	Mide la cantidad de objetivos alcanzados expresados como conductas.
	Cualitativa (global)	Valora además el proceso seguido, materiales, profesor, currículo, instrumentos de evaluación, etc.
Por la pauta	Normativa	Clasifica al alumno dentro del grupo mediante estadísticas.
	Criterial	Mide el progreso del alumno de acuerdo con un criterio.
Por el agente	Autoevaluación	Practicada por el propio sujeto del aprendizaje (alumno)
	Heteroevaluación	Practicada por el profesor a los alumnos.
	Coevaluación	Practicada por los colegas de aprendizaje (otros alumnos)

FUENTE: Cuadro resumen de modelos de evaluación por: su objetivo, la pauta, el agente.

La evaluación educativa por el momento en que se realiza puede ser:

i) Evaluación inicial

Se aplica en forma preliminar, antes de impartir un tema o los contenidos de la asignatura para obtener información sobre la situación real del alumno, con la finalidad de indagar qué acontecimientos tiene antes de iniciar el estudio del tema. Comprende la evaluación diagnóstica que puede ser de entrada o de requisitos (Delgado, 2004).

Según Giménez (1997) "*pretende conocer los preconceptos de los alumnos, tener una intuición de sus intenciones, reconocer sus habilidades y destrezas procedimentales, tomar en cuenta sus actitudes y contrastar todo ello con lo que se pretende trabajar"*. Adquiridos en asignaturas consideradas como requisitos y es base para impartir nuevos conocimientos; que desde la teoría del aprendizaje significativo, es averiguar qué sabe el alumno y qué tiene en su estructura mental (Orlich, 1994).

La evaluación inicial se realiza mediante la aplicación de una prueba previa; de reactivos elaborados para recavar información de los conocimientos previos para tratar un tema. Los instrumentos más usados para estas pruebas son: cuestionarios, pruebas de conocimiento y test de inteligencia.

En el estudio realizado se administró una prueba de conocimiento (de requisitos), donde se evalúan conceptos, destrezas operativas, manejo del lenguaje simbólico y gráfico, necesarios para iniciar con el estudio de las funciones trigonométricas a partir de los puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano.

ii) Evaluación procesual.

Se lleva a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, para controlar, diagnosticar o regular, aprender de los errores cometidos y conseguir mejores logros. Proporciona información cuantitativas y cualitativas necesarias para analizar las variables del proceso didáctico, corregir el propio proceso, reconducir la enseñanza y establecer una retroalimentación; suministrados periódicamente con el fin de verificar si el aprendizaje se está logrando realmente. Proporciona al profesor un feed-back continuo acerca de su enseñanza, para que pueda replantear sus estrategias.

La evaluación procesual (o formativa) acompaña a todo el proceso de formación del alumnado; su función es la de detectar y diagnosticar al principio de cada secuencia didáctica, orientar a lo largo del desarrollo de la misma e incluso al acabar, prever actuaciones de mejora, García Hoz (1985).

Bloom (1990) considera que la evaluación formativa da mejores resultados cuando no se le atribuye una nota. Esta evaluación puede utilizarse como recurso de enseñanza y como fuente de motivación, con efectos muy positivos. Para Casanova (1999) "*es netamente formativa, pues el favorecer la recogida continua de datos, permite la adopción de decisiones sobre la marcha, que es lo que más interesa al docente para no dilatar en el tiempo la resolución de dificultades presentadas por sus alumnos"*. El propósito esencial es proporcionar información permanente para adecuar los contenidos y los procedimientos que se están desarrollando a las características y expectativas del grupo para indicar el grado en que viene lográndose los objetivos, y permite hacer reajustes en el programa si es necesario, Villalobos (2002).

Los instrumentos adecuados a la evaluación procesal son: Guías de observación, listas de cotejo, escalas de valoración, pruebas de conocimiento, ficha de observación operacional. Para el caso de nuestro estudio se hizo una práctica continua de pruebas orales y escritas, trabajos individuales y en equipo durante el desarrollo, con asesoría del profesor y a través de autoevaluación y coevaluación permanentes en clase.

Una de las mayores dificultades en la aplicación de las evaluaciones formativas, es la falta de habilidad en muchos docentes para utilizarlas dada la tendencia a clasificar y clasificar a los estudiantes. La evaluación formativa no consiste en poner notas, pero tampoco prescinde de ellas; lo ideal es interrelacionar la evaluación de proceso con la evaluación sumativa (Delgado, 2004).

iii) Evaluación final o Sumativa

Se lleva a cabo al final de un proceso de enseñanza-aprendizaje, para promover a los estudiantes para nuevos estudios e indicar el resultado global alcanzado, y que se traduce en una nota, como producto final del proceso enseñanza-aprendizaje. La evaluación sumativa interna tiene como objeto valorar, a partir de las evaluaciones formativas anteriores, los resultados finales alcanzados. Tiene un carácter prescriptivo y se traduce en los informes de evaluación que definen la promoción. La externa no tiene en cuenta el proceso seguido y se centra en el control de la calidad, la revisión de los objetivos y los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Según Villalobos (2002) está referido a los logros finales del proceso enseñanza-aprendizaje, su función es definir la actividad de la estrategia o programa aplicado, medir en que grado se cumplieron los objetivos a través de una prueba y establecer criterios para perfeccionar futuras actividades de aprendizaje.

La evaluación final adopta dos funciones:

- Función *formativa*, para adecuar la enseñanza al modo de aprendizaje del alumno o para retroalimentar la programación del profesor, con miras a mejorar el proceso de enseñanza en la unidad didáctica o clase siguiente.
- Función *sumativa*, para tomar la decisión última sobre el grado de lo alcanzado por un alumno y obrar en consecuencia (Casanova, 1999).

Los resultados de la evaluación final se pueden analizar e interpretar con tres referentes distintos:

- en relación con los objetivos y criterios de evaluación establecidos para el tema;
- en relación a la evaluación inicial realizado a cada alumno;
- en relación con los resultados alcanzados por el resto del grupo.

Entre los instrumentos que con más frecuencia se utilizan para la evaluación final, destacan: escalas de valoración, pruebas de conocimiento, cuestionario de opinión. En el estudio realizado, se aplica una prueba para concretar con precisión el aprendizaje individual logrado por los alumnos referente a: funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas e identidades trigonométricas.

<table>
<tr><td rowspan="6">Por el momento en que se realiza</td><td rowspan="2">Inicial</td><td>Colectiva</td><td>Establece un pronóstico sobre el grupo.</td></tr>
<tr><td>Individual</td><td>Diagnostica sobre un individuo o grupo pequeño.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procesual (Formativa)</td><td>Según modo</td><td>Continua: Mide Continuamente el progreso de una destreza.</td></tr>
<tr><td>Según objeto</td><td>Puntual: mide el estado puntual de una capacidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sumativa (Final)</td><td>Interna</td><td>Proceso educativo, alumnos, centro, departamento, etc.</td></tr>
<tr><td>Externa</td><td>Mide lo mismo pero con criterios de calidad, sin tener en cuenta el proceso.</td></tr>
</table>

FUENTE: Cuadro de modelos de evaluación según su temporalización.

Para la elaboración de los ítems de una prueba, se usan con taxonomías, siendo uno de los más conocidos los niveles del dominio cognoscitivo de la Taxonomía de los objetivos de la educación de Bloom.

2.1.8. Dominio cognoscitivo de objetivos educacionales según Bloom.

En la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, lo fundamental es comprobar el aprendizaje logrado por el estudiante durante el proceso de instrucción y, conexo a ella se desarrollan el dominio afectivo y psicomotor. En el dominio cognoscitivo , Bloom (1990, p.10) incluye objetivos que "*se refieren a la memoria o evocación de los conocimientos y al desarrollo de habilidades y capacidades técnicas de orden intelectual. Este domino considerado en la mayoría de los trabajos orientados a exámenes de conocimientos adquiridos"*. Asimismo, es el terreno en el cual se han extendido la mayor parte de trabajos sobre estructuración del currículo**,** y en el cual pueden encontrarse las definiciones de objetivos más claros en su formulación verbal, como descripción del comportamiento verbal.

El dominio cognoscitivo planteado por Bloom, posee seis niveles o categorías:

CONOCIMIENTO: Capacidad de recordar hechos específicos y universales, métodos y procesos, un esquema, una estructura, conceptos o fórmulas matemáticas. Los objetivos de conocimiento subrayan sobre todo los procesos psicológicos de evocación. En este nivel recuerda porciones de información, conceptos, fórmulas matemáticas, reglas y convenciones para desarrollar un problema (Bloom, p. 127).

COMPRENSIÓN: La comprensión implica tres operaciones diferentes: la traducción, interpretación y extrapolación. Mediante la traducción se expresa un mensaje o concepto conocido en palabras diferentes, o se pasa de un simbolismo a otro; hay comprensión cuando una persona expresa en forma verbal, por escrito o simbólicamente una idea aprendida; y, de la extrapolación se espera que quien recibe la comunicación no se quede en aspectos literales de la misma, sino infiera consecuencias más allá de lo que se percibe. El alumno asimila lo que se le está enseñando y hace uso de ideas que se le transmite. Esta habilidad en la matemática se expresa en interpretación gráfica de las funciones, traducción de la información en tablas y explicación de propiedades en forma gráfica y simbólica (Bloom, p. 129).

APLICACIÓN: Uso de abstracción en situaciones particulares y concretas. Pueden presentarse en forma de ideas generales. Reglas de procedimientos o métodos generalizados y pueden ser también principios. La aplicación designa al uso de representaciones abstractas a situaciones concretas.

Aplicar principios o generalizaciones a nuevas situaciones o problemas es una demostración de haber comprendido plenamente. Para comprobar la aplicación es necesario que los ejemplos y problemas a resolver sean diferentes a los utilizados en el momento de la instrucción (Delgado, 2004).

ANÁLISIS: Fraccionamiento de una comunicación o conocimiento en sus elementos constitutivos, de tal modo que aparezca en forma clara la jerarquía relativa de las ideas y se exprese explícitamente la relación existente entre éstas. El análisis clarifica la comunicación, indica cómo está organizada y la forma cómo se logra comunicar sus efectos, sus fundamentos y ordenación. Expresados a través de: la aplicación de los términos o conceptos y la predicción de efectos probables de cambio (Bloom, p. 130). Analizar implica el uso del saber de memoria o conocimiento de la comprensión y de la aplicación. Es más completo, lento y difícil que la comprensión, pero necesario para desarrollar la inteligencia.

SÍNTESIS: Reunión de los elementos y las partes para formar un todo. Trata sobre los procesos de trabajo con elementos aislados, partes, piezas, etc., ordenándolos y combinándolos de tal manera que constituyan un esquema o estructura que antes no estaba presente de manera clara. Se expresa a través de la producción de una comunicación única, producción de un plan o conjunto de operaciones y la derivación de un conjunto de relaciones abstractas (Bloom, p. 130-131). La síntesis constituye uno de los propósitos fundamentales de la educación: lograr que el estudiante sea capaz de producir ideas o planes de acción. Un ejemplo de síntesis sería definir una situación matemática como consecuencia de una abstracción y análisis exhaustivo de los elementos y propiedades.

EVALUACIÓN: Formulación de juicios sobre el valor del material y los métodos, de acuerdo a determinados propósitos. Incluye juicios cuantitativos y cualitativos respecto de la medida en que los materiales o los métodos satisfacen determinados criterios que el estudiante haya determinado o los que le son sugeridos. La evaluación se expresa a través de: juicios cualitativos y cuantitativos, para establecer el valor de ciertas ideas, trabajos, métodos y soluciones; utilizando determinados criterios y normas para apreciar y valorar el proceso de enseñanza-aprendizaje (Bloom, p 131).

2.2. ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

La matemática es una actividad vieja y polivalente, empleada con objetivos profundamente diversos. Fue utilizada como un importante elemento disciplinador del pensamiento en el Medioevo, ha sido la más versátil e idónea herramienta para la exploración del universo a partir del Renacimiento, ha constituido una magnifica guía del pensamiento filosófico, entre los pensadores del racionalismo y filósofos contemporáneos, ha sido un instrumento de creación de belleza artística, un campo de ejercicio lúdico, entre los matemáticos de todos los tiempos (De Guzmán, 1990).

Para Valiente (2000) la matemática es una parte importante de la riqueza cultural de la humanidad que debe ser compartida por todos. Desde esta perspectiva, la enseñanza de la Matemática en los niveles básicos tiene como propósitos: Hacer conocer al adolescente el acervo cultural de la sociedad, desarrollar en los estudiantes nociones y conceptos útiles para comprender su entorno, proporcionarles un conjunto de procedimientos e instrumentos del pensamiento que les permita el acceso a las otras áreas del conocimiento y la actividad humana. Por ello, en la escuela secundaria el aprendizaje de la Matemática debe favorecer en el estudiante: la apreciación del trabajo personal, su capacidad para explorar y buscar soluciones a problemas y, su amplitud para comunicar, analizar y justificar afirmaciones.

2.2.1. Metodología de enseñanza-aprendizaje de la matemática

El método es la dirección misma del proceso de enseñanza-aprendizaje que depende de los objetivos de un programa de estudios. Para la matemática estos métodos llamados pedagógicos o procedimientos pedagógicos, que tienen tres intenciones y sus correspondientes modos de enseñanza, como se presenta en el cuadro sinóptico:

MÉTODOS PEDAGÓGICOS	Para la dirección del aprendizaje.	Expositivo Interrogativo Activo
	Según la presentación del aprendizaje.	Intuitivo Simbólico
	Por las relaciones con los alumnos durante el aprendizaje.	Individual colectivo

Estos modos se expresan en formas metodológicas, y las que más se aplican en la enseñanza de la matemática en el nivel de educación secundaria son: La forma Socrática, de correlación, Heurística, Expositiva, Estudio de Textos, Individual y de Proyectos.

No existe una estrategia metodológica predeterminada, aislada y única para la enseñanza de la matemática. Para lograr aprendizajes significativos en los alumnos es preciso conjugar algunos métodos activos como el de: autoestudio, estudio dirigido, de proyectos, heurístico, etc. Desde esta perspectiva, la Matemática en el nivel secundario, debe ser enseñada en función al interés del estudiante, orientada hacia el desarrollo de competencias y de sus capacidades para que los estudiantes:

- Usen sus conocimientos adquiridos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la resolución de problemas dentro y fuera de la escuela.
- Realicen cálculos valiéndose de las propiedades de los números reales y de las operaciones definidas en ella: cálculo mental y cálculo escrito.
- Desarrollen su capacidad de pensar sobre números, formas, funciones y sus transformaciones. Se incorporen a la cultura tecnológica de nuestra época a través del uso de calculadoras y computadoras.

El proceso de aprendizaje de la matemática se da por niveles:

Nivel 1 (de reconocimiento), donde los alumnos realizan acciones concretas sobre objetos matemáticos.

Nivel 2 (de análisis) donde se identifican los elementos y propiedades de los objetos matemáticos, sin llegar a una etapa de generalización.

Nivel 3 (de clasificación), comienza la capacidad de razonamiento formal, pudiendo dar definiciones y entender definiciones dadas.

Nivel 4 (de deducción formal), los alumnos entienden y realizan razonamientos lógicos formales.

Los métodos de aprendizaje y la enseñanza de la matemática que se propone son propios del constructivismo pedagógico, que se da a través de la construcción de esquemas de conocimiento matemático, donde:

- Los alumnos aprenden matemática a partir de sus experiencias y mediante la reflexión de las acciones que realizan. La actividad de aprender matemática, a los alumnos debe permitirles elaborar hipótesis, probar distintos caminos para resolver problemas, equivocarse, disponer de estrategias para darse cuenta de los errores, rectificar, etc.

- Para aprender matemática, los alumnos necesitan poseer una gama de conocimientos previos, expresar sus ideas, relatar sus experiencias, trabajar con materiales, dibujar o modelar sus representaciones mentales, intentar procedimientos, equivocarse, corregirse, sentirse estimulados, organizar sus descubrimientos y demostrar sus adquisiciones.

- El aprendizaje de la matemática debe ser mediado y favorecido por un docente que asuma el rol de orientador, que dialogue con los alumnos, que proporciones los materiales adecuados y, principalmente, que le dé confianza en su capacidad de aprender.

- El aprendizaje de la matemática en los alumnos se ve enriquecido por el diálogo con sus pares, donde podrá confrontar sus puntos de vista, intercambiar procedimientos, aprender de los otros.

2.2.2. Teorías para el aprendizaje de la matemática

La mayoría de las teorías de aprendizaje de matemática se sustentan a través de dos enfoques principales. Históricamente, el primero tiene una raíz conductual y el segundo una base cognitiva.

La tendencia conductual (asociacionista): Sobre el aprendizaje matemático, considera que aprender es cambiar conductas e insiste en destrezas de cálculo y divide estas destrezas en pequeños pasos para que, mediante el aprendizaje de destrezas simples, se llegue a aprender secuencias de destrezas más complejas. Desde esta perspectiva, por ejemplo, un alumno ha aprendido a dividir si realiza correctamente divisiones.

La interpretación cognitiva (estructuralista): Sobre el aprendizaje matemático, considera que el aprender Matemática se alteran las estructuras mentales e insisten en el aprendizaje de conceptos. Dada la complejidad de los conceptos, el aprendizaje no puede descomponerse en la suma de aprendizajes más elementales, sino que se origina partiendo de la resolución de problemas o de la realización de tareas complejas.

En la teoría cognitiva de Gagné, la atención se ha dirigido hacia las implicancias del diseño de enseñanza. En ella, toda situación de aprendizaje en general y la enseñanza-aprendizaje de la matemática en particular que se resume en el cuadro:

Etapa de aprendizaje	Proceso	Eventos externos que ejercen influencia
Motivación	Expectativa	Comunicación del objetivo por realizar.
Comprensión	Atención: percepción selectiva.	Confirmación previa de la expectativa a través de una experiencia exitosa.
Adquisición	Cifrado: acceso a la acumulación.	Modificación en la estimulación para atraer la atención.
Retención	Almacenar	Aprendizaje previo de percepción. Indicaciones diferenciales adicionales para la perfección.
Recordar	Recuperación	Proyectos sugeridos para el cifrado. Proyectos sugeridos para la recuperación Indicaciones para la recuperación.
Generalización	Transferencia	Variedad de contextos para las indicaciones dirigidas a la recuperación.
Actuación	Respuesta	Casos de actuación
Retroalimen-tación	Fortalecimiento	Retroalimentación informativa que proporciona constatación o comparación de un modelo.

2.2.3. Finalidad de la enseñanza de la Matemática

Según Riveros, 1981; Torres, 1993; Santaló, 1994 (citado por Pérez de Zapata, 1997); y Rico (2000) la enseñanza-aprendizaje de la Matemática tiene tres propósitos:

- **Formativo,** propicia el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, simbolización. Abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal. Está relacionado con el desarrollo de habilidades cognoscitivas abstractas, tales como la capacidad para razonar, abstraer, deducir, entre otras, y permite desarrollar la capacidad de pensar, influyendo en la formación de la inteligencia.

- **Práctico, utilitario o funcional,** porque la Matemática proporciona esquemas mentales, que permiten resolver problemas de la vida cotidiana, incluyendo situaciones de la vida laboral. La matemática aparece en todas las formas de expresión humana, permiten codificar información y obtener una representación del medio social y natural, para una actuación posterior sobre dicho medio.

- **Instrumental,** porque proporciona herramientas de trabajo al desarrollo y sistematización de otras disciplinas, a través de sus resultados. Las técnicas matemáticas se aplican no sólo en la Física y la Química, sino también a la Biología, la Economía, las Ciencias Sociales, etc. En la actualidad, no hay disciplina alguna que no necesite de la matemática.

Los propósitos expuestos indican que el aprendizaje de las matemáticas en el nivel secundario debe ser un proceso sistemático y siempre activo, resultado de una variedad de interacciones del alumno con su maestro y compañeros, que se produce sobre la base de conocimientos previos, de tipo formal, intuitivo e informal. La acción sobre objetivos reales, las manipulaciones a los que se puede someterse objetos a cualquier actuación que ponga manifiesto relaciones que pueden considerarse entre objetos diversos, que constituyen imprescindible en la comprensión y asimilación de los conceptos matemáticos, que se integran a la red conceptual previamente existente. (Rico, 2000).

2.2.4. Tendencias Metodológicas del aprendizaje de la Matemática:

Entre las tendencias metodológicas de enseñanza-aprendizaje personalizado de la matemática en el nivel de educación secundaria, destacan:

a) Aprendizaje en base a problemas:

Estrategia didáctica para aprendizaje de la matemática propuesto por Pólya (1967), que enfatiza la enseñanza del descubrimiento y desarrollo de ejercicios apropiados, involucrando al estudiante en la solución de problemas, generaliza su método en cuatro pasos: **Entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan, y mirar hacia atrás**. Según Pólya para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales para dar la respuesta, dando un paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, ello distingue un problema de un ejercicio. Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas, pues ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos entre otras cosas, los cuales se pueden aplicar cuando se enfrentan a la tarea de resolver problemas.

Luego, este método fue desarrollado por los psicólogos (D'Zurilla y Goldfried, 1971), como uno de los procedimientos heurísticos para el aprendizaje de la matemática que abre un panorama en las actividades intelectuales de más amplio nivel, esta estrategia de aprendizaje de la matemática se da a través de:

1) Presentación y análisis del problema;
2) Comprensión del problema: Identificación de datos o informaciones y la incógnita.
3) Aprendizaje de conceptos y propiedades, uso de medios y materiales adecuados.
4) Aplicaciones progresivas de conceptos y propiedades en problemas previos, medios y materiales adecuados;
5) Solución del problema presentado;
6) Respuesta al problema presentado;
7) Otras aplicaciones.

Mediante la presentación, planteamiento de problemas y situaciones problemáticas, expresamente elaboradas, se orienta al alumno al proceso de aprendizaje de un tema determinado para la adquisición de conocimientos, desarrollo de habilidades y de actitudes, lográndose así los objetivos de aprendizaje propuestos; con orientación y guía del profesor y en el proceso de retroalimentación.

La resolución de problemas juega un papel trascendental en la aproximación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se espera que el estudiante construya su conocimiento matemático al enfrentar, dentro del contexto social del salón de clase, problemas para los que no conoce de antemano una estrategia de solución apropiada, para significar un reto y que ponen en juego un conocimiento matemático relevante (Rico, 1988).

A través de este método el alumno manipula los objetos matemáticos, activa su propia capacidad mental, ejercita su creatividad, reflexiona sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo, hace transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, adquiere confianza en sí mismo, se divierte con su propia actividad mental, se prepara para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana, se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

Ventajas:

-) Proporciona a los alumnos: capacidad autónoma y crítica para resolver sus problemas aplicando sus propios procedimientos.

-) Los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos.

-) Se realizan trabajos atrayentes, divertidos, satisfactorio, autorrealizador y creativo, proporcionando el proceso de retroalimentación continua.

-) Se consolidan hábitos que tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.

b) Aprendizaje Cooperativo:

El Aprendizaje Cooperativo es una estrategia pedagógica en la que a los estudiantes trabajando en equipos, con el interés común de desarrollar habilidades de carácter cognitivo, valorativo y socioafectivo, que beneficien a todos para el logro de aprendizajes significativos. Así, el aprendizaje cooperativo:

-) Es conjugar esfuerzos para alcanzar una meta de aprendizaje común.

-) Es más que la ejecución distribuida de una tarea entre los miembros del grupo.

-) Es lograr productos que son resultados de la potenciación de los esfuerzos individuales.

-) Se produce si cada uno de los miembros del grupo se siente responsable de su propio aprendizaje, al mismo tiempo que del aprendizaje de los demás.

En el aprendizaje cooperativo se consideran las componentes:

Interdependencia positiva: Cada uno es responsable del aprendizaje de los demás.

Interacción fomentadora: Aliento mutuo y retroalimentación positiva.

Responsabilidad individual: El esfuerzo de cada uno es indispensable para el éxito.

Habilidades interpersonales: Conocimiento mutuo, confianza, aceptación y comunicación clara.

Procesamiento por el grupo: Análisis y evaluación del funcionamiento grupal.

Para que el aprendizaje cooperativo sea efectivo el docente debe considerar los siguientes pasos para la planificación, estructuración y manejo de las actividades.

1. Especificar los objetivos de la clase o tema a tratar.
2. Establecer con prioridad la forma en que se conformarán los grupos de trabajo.
3. Explicar con claridad a los alumnos la actividad de aprendizaje que se persigue y la interrelación grupal deseada.
4. Supervisar en forma continua la efectividad de los grupos de aprendizaje cooperativo e intervenir para enseñar destrezas de colaboración y asistir en el aprendizaje académico cuando surja la necesidad.
5. Evaluar los logros de los estudiantes y participar en la discusión del grupo sobre la forma en que colaboraron.

Se espera que los alumnos interactúen entre sí, que compartan ideas y materiales, apoyo y alegría en los logros académicos de unos y otros, que elaboren y expresen conceptos y estrategias aprendidas. La valuación participativa es el sistema recomendado.

El papel del profesor es directivo, orientador. Sus intervenciones-explicaciones, comentarios, preguntas, respuestas y las tareas propuestas a los alumnos para su realización durante la clase, están destinadas a encauzar los hábitos de trabajo intelectual y otras capacidades de los educandos. El aprendizaje no solo se nutre de los conocimientos del profesor, de los libros, textos y otros materiales didácticos; sino, también de lo mucho que sus compañeros son capaces de aportar; desarrollando valores como la ayuda mutua o la colaboración desinteresada de los más avanzados en el proceso.

En el Aprendizaje Cooperativo, destacan las técnicas:

- **El Tándem (o trabajo en pares)**, tiene una semejanza a una bicicleta para dos personas en la cual ambas personas pedalean la bicicleta, avanzando en forma conjunta y con una dirección determinada (objetivo). Esta estrategia es aplicada en todas las sesiones del aprendizaje con el módulo didáctico.

- **El Rally (o trabajo en grupos paralelos-):** Concurso entre varios grupos de estudio, que intenta realizar su mejor presentación, propicia la colaboración dentro de los grupos y la competencia entre ellos. En la enseñanza con módulos, esta estrategia se desarrolla una vez por semana en el desarrollo grupal del módulo.

- **El rompecabezas (o trabajo en grupos cruzados-)**: Tiene la estructura de dependencia mutua, para realizar una tarea con éxito. Los alumnos se ven obligados a cooperar, porque cada uno dispone sólo de una parte de la información. Una vez que cada uno trasfiera información a los miembros del grupo e individualmente o en conjunto deben armar sus piezas de información como rompecabezas. Esta actividad se recomienda, cuando se distribuye tareas grandes o extensas, y específicas a los integrantes del grupo, o a cada grupo.

c) Aprendizaje Activo o Método activo:

Estrategia metodológica sustentada en el principio de que el alumno sólo aprende bien cuando lo hace por observación, reflexión y experimentación (auto-formación). La enseñanza debe ser adaptado a la naturaleza propia de cada alumno (enseñanza-diferenciado); orientado no sólo en su formación intelectual, también a sus aptitudes manuales, así como a su energía creadora (educación integral); etc.

El aprendizaje activo se caracteriza porque:

- Está centrado en los alumnos. El educando es el eje del sistema educativo y protagonista de su aprendizaje.
- Parte de las necesidades, intereses, expectativas y/o curiosidades de los estudiantes.
- Se funda en las necesidades de conocer, saber, buscar, elaborar, trabajar, observar, etc. El docente debe crear o descubrir dichas necesidades.
- Respeta la vocación y espontaneidad de los estudiantes. Las cosas que hagan con agrado les serán más gratificantes, duraderas y constructivas. No la imposición.
- Permite la comunicación horizontal. El proceso educativo fundamentalmente es un proceso comunicativo entre el docente y los alumnos entre sí.
- Es vital: En el proceso de enseñanza-aprendizaje se toma en cuenta el entorno, haciendo una educación realista, vital y coherente.

En el aprendizaje activo:

EL DOCENTE asume la función de generador y motivador de aprendizajes, y sirve de guía y modelo para sus alumnos. Determinando los objetivos que se propone lograr, tomando en cuenta las características y necesidades del estudiante, selecciona los procesos para poner en práctica la enseñanza y las condiciones del aprendizaje, en cantidad y calidad, que influye algo más que una buena presentación material, buscando producir una alta motivación del estudiante para participar y comprometerse en el proceso de su propia educación y sentir una seguridad que le conduzca al éxito.

LOS ALUMNOS, asumen una función protagónica, activa y dinámica en su proceso formativo, especialmente en su aprendizaje; desafiados a hacer algo que no saben hacer, es decir encontrar la respuesta a un problema que reta su imaginación y sus propias habilidades; trabajando en equipo, solidariamente y cooperando con sus compañeros o en proyectos individuales y grupales; manteniendo un estado y una mentalidad optimista; tomando en consideración el decálogo de desarrollo: compañerismo, orden, puntualidad, superación, respeto a los demás, trabajo, responsabilidad, honradez, solidaridad, perseverancia, laboriosidad y tolerancia.
En el proceso de la enseñaza de la matemática a través de módulos didácticos se conjugan, entre otras, el trabajo individual, la resolución de problemas, la hoja de instrucción, la instrucción programada, el estudio dirigido, el trabajo en equipo y el de los grupos de estudio que forman parte de los métodos activos colectivizados.

d) Aprendizaje a través del Computador:

El aprendizaje ayudado por computadoras (*Computed assisted instruction*) es un procedimiento que se desprende de la instrucción programada, propicia un aprendizaje activo-personalizado a través de la combinación de diferentes medios. Así por ejemplo, cuando el estudiante lee mensajes a través de la pantalla recibe mensaje similar al libro; si observa gráficos o imágenes, tiene la función de materiales de imagen fija y gráficos; si escucha un mensaje auditivo tiene la función de medio auditivo, etc. "*A través de este material didáctico se integra las actividades de estimulación, respuesta y retroalimentación"* (Ogalde, 2000, p. 84). Entre algunas ventajas del uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje, destacan:

- Incrementa o mantiene la atención del alumno durante más tiempo.
- Reduce el tiempo necesario para aprender una tarea.
- Permite al alumno interactuar activamente con el material,. Responder, practicar y probar cada paso del tema que debe dominar.
- Permite al estudiante conocer en forma inmediata si sus respuestas fueron o no acertadas así como la causa de sus errores.
- Propicia un alto grado de individualización, el estudiante avanza a su propio ritmo.

En los últimos años, se vienen propiciando el uso de software matemáticos para coadyuvar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a través de herramientas multimedia y elaboración de hipermedios con la utilización simultánea de sonido, movimiento, imagen y colores, que motivan y facilitan el aprendizaje de los alumnos, constituyéndose en medios y materiales insoslayables para los docentes de matemática.

2.2.5. Organización del contenido

Compartiendo el punto de vista cognitivo, el conocimiento matemático está organizado en dos grandes campos: Conceptual y procedimental.

El **conocimiento conceptual:** Se caracteriza por ser rico en relaciones, puede considerarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión saturan los hechos y proposiciones individuales de modo que todas las piezas de información están conectadas a alguna red.

En el conocimiento conceptual se distinguen tres niveles: los **hechos**, que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos; los **conceptos** que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, que admiten un modelo o representación y se designa con un signo o un símbolo; y las **estructuras conceptuales**, que unen conceptos o sugieren formas de relación entre conceptos, constituyendo algún orden o relación entre ellos.

El **conocimiento procedimental:** Consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea, lo constituyen las reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. Hay instrucciones paso a paso que prescriben cómo concluir una tarea, se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada.

En la ejecución de tareas matemáticas se distinguen tres niveles de conocimientos en el campo de los procedimientos. Las **destrezas**, consisten en transformar una expresión simbólica desde una forma dada hasta otra forma, y para ello se ejecutan una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos; los **razonamientos** que se presentan al procesar relaciones entre conceptos y propiedades, permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos; las **estrategias**, que se ejecutan sobre representaciones y relaciones que operan dentro de una estructura conceptual, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

2.2.6. La enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Secundaria

La enseñanza de la Matemática crea los estímulos que activan y aceleran el aprendizaje, el problema radical de la enseñanza es acoplar la mente del alumno a la materia objeto de aprendizaje. Esto implica una enseñanza personalizada en forma que, dada una materia a enseñar, lo ideal es encontrar para cada alumno el transformador adecuado al nivel de su entendimiento y formación, que hiciese el acoplo más adecuado, (Santaló, 1994). Para Deiudonné (1986) la finalidad de la enseñanza de la matemática en las sociedades modernas, es que los alumnos aprendan a ordenar y encadenar sus pensamientos, aprendiendo la matemática con claridad y rigurosidad.

El proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la mayoría de los centros educativos de la región se da por el procedimiento expositivo, donde el profesor muestra los conceptos, las ideas y todo el razonamiento como si estuviera en una conferencia, con exposición de contenidos-ejemplos-ejercicios sencillos-ejercicios más complicados- dejando al alumno el papel de receptor de los conocimientos. Este procedimiento induce a los alumnos a un aprendizaje memorístico y pasajero, en base a memorización de reglas, fórmulas y hechos poco significativos que el alumno tiene como única arma para resolver un problema.

Como una alternativa a esta enseñanza tradicional, que ve al alumno como un recipiente vacío que asimila contenidos dados por el docente, debe existir una correspondencia horizontal entre el acto de aprender y el acto de enseñar, pues lo que interesa es la adquisición de conocimiento y cambio de actitudes, explotando los conocimientos previos del alumno, haciendo que experimenten por sí mismos para dotarlos de significado y aceptar que el alumno vaya construyendo su propio conocimiento al integrar la nueva información en redes conceptuales ya existentes.

Según Pérez de Zapata (1997) la Matemática es una de las asignaturas que ocupa un lugar relevante en los currículos de los distintos niveles del sistema educativo, en la que se adjudica valiosos aportes para la formación integral del alumno que justifica ampliamente su presencia. Sus aportes no sólo contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico, sino hacia el desarrollo de un pensamiento creativo y crítico, que permite al alumno:

- Desarrollar la capacidad de abstracción y pensamiento reflexivo, que conduzca a saber elegir qué aceptar y qué rechazar, usar la experiencia y los conocimientos previos como punto de referencia, usar variadas estrategias de pensamiento, buscar y reunir información fiable para fundamentar juicios frente a lo que se va hacer.

- Demostrar conocimiento, reflexión y control del proceso de pensamiento, que permita desarrollar la capacidad para reconocer los pasos y procesos que se han utilizado en la resolución de una tarea, aumentar el grado de conciencia que la persona tiene de su propio ritmo en el proceso de aprender.

- Contribuir a la consecución de las necesidades básicas del aprendizaje: "conocimientos, capacidades, actitudes y valores necesarios para que las personas sobrevivan, mejoren su calidad de vida sigan aprendiendo.

Según lo expresado, la enseñanza de la matemática en el nivel secundario están orientado a incentivar que los alumnos:

- Usen sus conocimientos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la resolución de problemas dentro y fuera de clase.
- Realicen cálculos, valiéndose de las propiedades de los números reales y de las operaciones definidas en ella: cálculo mental y cálculo escrito.
- Desarrollen su capacidad de pensar sobre números, formas, funciones y sus transformaciones. Se incorporen a la cultura tecnológica de nuestra época a través del uso de calculadoras y computadoras.
- Elaboren hipótesis, prueben distintos caminos para resolver problemas, equivocarse, disponer de estrategias para darse cuenta de los errores, rectificar, etc.
- Utilicen una gama de conocimientos previos: expresar sus ideas, relatar sus experiencias, trabajar con materiales, dibujar o modelar sus representaciones mentales, intentar procedimientos, equivocarse, corregirse, sentirse estimulados, organizar sus descubrimientos y demostrar sus adquisiciones. Que pueden ser logrados sólo a través de la aplicación sistémica de la enseñanza modular y el uso pertinente de los métodos activos en clase.

2.2.7. Objetivos generales de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la educación secundaria.

Según el Ministerio de Educación (2004) los objetivos de la enseñanza de la Matemática en este nivel están orientados a que el educando:

- "*Desarrolle su capacidad de razonamiento lógico, de operativización, de análisis-síntesis, de abstracción y generalización, que permitan comprender mejor su realidad y tomar conciencia del rol que le corresponde en nuestra sociedad*".

- "*Disponga de los instrumentos operativos básicos, relacionados con las grandes áreas de estudio de la asignatura, que le posibiliten elevar su nivel científico-técnico-cultural y que favorezcan su capacitación laboral*".

Así, el área de Matemática es el espacio curricular en el cual están organizados los aprendizajes que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de lograr el conocimiento matemático, destrezas, habilidades y modos de pensamiento que van a necesitar en la vida diaria, para ser ciudadanos conscientes, participativos y críticos.

2.3. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA TRIGONOMETRÍA

2.3.1. Origen e importancia de la Trigonometría.

La trigonometría surge como medio para satisfacer las necesidades de las investigaciones astronómicas y su historia se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, que fueron perfeccionando por los griegos quienes establecieron sus fundamentos. Se considera a Herón de Alejandría y Hiparco de Nicea (361-127 a.c) como los creadores de la Trigonometría, pero el nombre se cree que se deba a Bortholomeus Petescus (1561-1613).

Basándose en los fundamentos de Hiparco de Nicea, Ptolomeo generaliza las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos y confecciona una tabla de funciones trigonométricas para ser usados en los cálculos astronómicos, publicado en el primer libro de Almagesto que ha llegado hasta nuestra época. Luego, Isaac Newton (1642-1727) inventor del cálculo diferencia e integral fundamenta su trabajo en la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x, desarrollando las series para el sen$x$, para el cos$x$ y la tg x, que desempeñan un papel importante en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Leonhard EULER siglo XVIII, fue el fundador de la trigonometría moderna. A él se debe el actual uso de las minúsculas latinas *a, b, c,* para los lados de un triángulo plano o esférico y el de las mayúsculas correspondientes *A, B, C,* para los ángulos opuestos. Estudió las funciones circulares tomando el radio como unidad, estas funciones son las antiguas "Líneas trigonométricas" dadas mediante desarrollos en series enteras o en productos infinitos. Que forman con las funciones exponenciales, logarítmicas, funciones transcendentes elementales.

2.3.2. Tendencias y Aplicaciones del Aprendizaje de la Trigonometría en la educación secundaria.

Todo docente que aspira elevar el rendimiento académico de sus alumnos debe llevar con pertinencia el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para ello es necesario que conozca la evolución histórica del tema, materia de su enseñanza, sepa deducir resultados encuadrados en conceptos y propiedades de la Matemática superior, innovando conceptos con nuevas tendencias didácticas y con el uso de tecnologías como ayuda para plasmar el aprendizaje.

Según la National Council of Teachers of Mathematics (1992), el currículum de matemáticas básicas debe incluir el estudio de la Trigonometría para que todos los estudiantes sean capaces de aplicarlo en la resolución de problemas donde aparecen triángulos y explorar los fenómenos periódicos del mundo real usando las funciones seno y coseno en general; luego conocer la conexión que existe entre el comportamiento de las funciones trigonométricas y los fenómenos periódicos, aplicar técnicas generales de representación gráfica de funciones trigonométricas, las propiedades de las funciones trigonométricas en el estudio de las coordenadas polares, vectores, números complejos y series.

A partir de las relaciones entre las coordenadas de los puntos del plano y el radio vector correspondiente se originan funciones trigonométricas. Estas funciones, especialmente el seno y el coseno, constituyen modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos del mundo real, tales como el movimiento circular uniforme, los cambios de temperatura, los biorritmos, las ondas de sonido y la variación de las mareas. La exploración de los datos de estos fenómenos deben realizar todos los estudiantes de los distintos niveles educativos, principalmente en el Quinto Grado de Educación Secundaria de nuestro Sistema Educativo, deben identificar y analizar los modelos trigonométricos, y estudiar las identidades que impliquen expresiones y funciones trigonométricas inversas, junto a su aplicación en la resolución de algunas ecuaciones trigonométricas.

Actualmente, las calculadoras científicas, los software matemáticos como el MatLab, Derive, Matemática, etc. facilitan el aprendizaje de la Trigonometría, al proporcionar más potencia en los cálculos, que permiten desarrollar estructuras conceptuales y su puesta en práctica con aplicaciones reales a través de representaciones gráficas proporcionan herramientas dinámicas que permiten al alumno visualizar muchas situaciones reales mediante gráficos. Las representaciones gráficas un papel un papel importante en la adquisición de las estructuras conceptuales, así como de las propiedades de las funciones trigonométricas y las inversas.

Los alumnos que concluyen los estudios secundarios deben estar en condiciones para resolver algunas ecuaciones trigonométricas por medios informáticos. Además, deben aplicar razones trigonométricas en situaciones prácticas para la resolución de triángulos.

Como ejemplo, hallar el ángulo θ que se forma entre la transversal $\overline{AB}$ y posición final *P* de una lancha que al cruzar un río de 200 m de ancho es arrastrada por la corriente a una distancia de 150 m con respecto a la orilla opuesta del río (fig. 1).

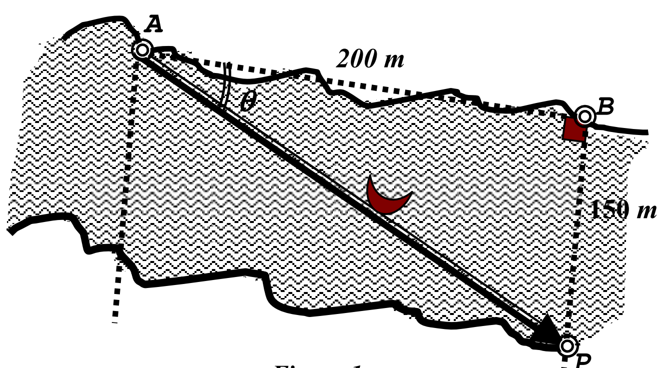


Figura 1

El estudiante, primero bosqueja un gráfico que ilustre el problema geométrico basado en la información dada, luego identifica la razón trigonométrica que relaciona los datos y escribiendo la ecuación correspondiente, luego obtiene una respuesta numérica e interpreta este valor con un grado de exactitud adecuado con la unidad de medida en uso. A partir de aquí los estudiantes están expeditos para descubrir las otras razones trigonométricas.

Lo esencial es que los estudiantes usen las funciones seno y coseno para comprender los fenómenos periódicos del mundo real, cuyos procesos de planteamiento y solución pueden verse por niveles. Por ejemplo, consideremos una rueda de forma circular con un radio de 25 cm que tarda 12 segundos en dar una vuelta completa. Así, obtendremos el modelo matemático que describa la relación entre la altura *h* y el tiempo ***t***.

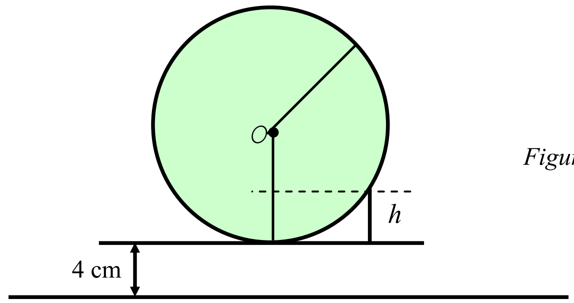


Figura 2

Por niveles, se tiene:

Nivel 1: En este nivel los alumnos construyen una tabla para valores de ***t*** y *h*. Asumiendo que el cochecito está en la posición más baja para ***t*** = 0, los estudiantes pueden determinar con facilidad los valores de *h* para ***t*** = 0, 3, 6, 9, 12. Para valores intermedios de ***t***, los valores correspondientes de *h* se pueden estimar a partir de un dibujo a escala como muestra (fig. 3), y dándose cuenta de la periodicidad de la función, los alumnos pueden conjeturar que la gráfica tiene forma sinusoidal y podrán predecir su forma para valores mayores de ***t***.

Tiempo .*t*(segundos)	Altura *h*(centímetros)
0	0
1,5	7
3	5
4,5	43
6	50
7,5	43
9	25
10,5	7
12	0

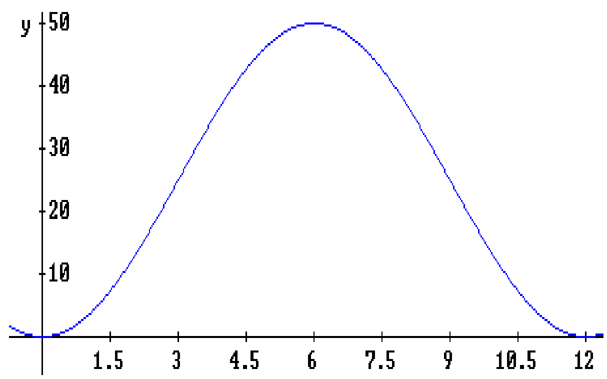
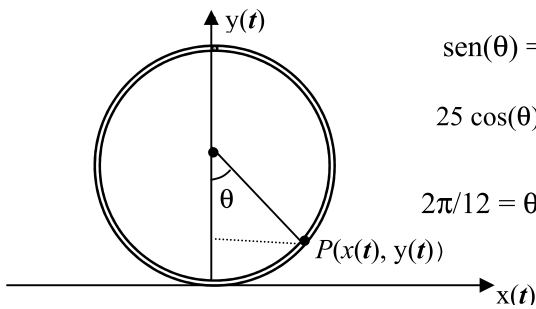


***Figura* 3**

Nivel 2: En este nivel los estudiantes están en condiciones de hallar la relación entre ***t*** y *h*, dado por: $h(\boldsymbol{t}) = -25\cos(\pi/6)\boldsymbol{t} + 25$ y se les pide que representen su gráfica y la analicen. La interpretación de la gráfica debe centrar la atención en: el significado, el contexto de máximos y mínimos relativos, la obtención de valores de ***h*** para valores dados de ***t*** y viceversa; la obtención de número de vueltas para valores (grandes) de ***t***, y el tiempo ***t*** que tarda en dar un número determinado de vueltas. Finalmente, los estudiantes investigarían los cambios que se producen en la gráfica en el caso de ruedas que tengan diferente radio y velocidad angular.

Nivel 3: Una vez que se sepa que la gráfica obtenida mediante experiencias como las que se llevaron a cabo en el Nivel 1, pertenecientes a una función de tipo $h(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}.\cos(b\boldsymbol{t}) + c$, los estudiantes procederían a calcular a, b y c comparando la gráfica $f(\boldsymbol{t}) = \cos(\boldsymbol{t})$ con la suya. Este análisis hará pensar en la necesidad de reflejar la gráfica f a través del eje $\boldsymbol{t}$ y luego la amplitud, el período y el desplazamiento vertical.

Nivel 4: En este nivel los alumnos usarían la Trigonometría del triángulo rectángulo y la proporcionalidad simple para poder obtener las expresiones paramétricas de un punto $P = (x(\boldsymbol{t}), y(\boldsymbol{t}))$ de la rueda en función del tiempo, verificando con ella que la altura es una función sinusoidal de $\boldsymbol{t}$. A continuación podrían utilizar un programa de representación paramétrica para simular la trayectoria de un punto en movimiento de la rueda circular.



$$\text{sen}(\theta) = x(\boldsymbol{t})/25 \rightarrow x(\boldsymbol{t}) = 25.\text{sen}(\theta)$$

$$25\cos(\theta) = (25 - y(\boldsymbol{t}))/25 \rightarrow y(\boldsymbol{t}) = -25\cos(\theta) + 25$$

$$2\pi/12 = \theta/\boldsymbol{t} \rightarrow \theta = (\pi/6).\boldsymbol{t}$$

Figura 4

Los conceptos relacionados con las funciones trigonométricas, tales como amplitud, período y ángulo inicial de fase, deben ser presentados ante los estudiantes del nivel secundario por medio de aplicaciones a fenómenos periódicos. Por ejemplo, la ecuación de un movimiento ondulatorio. Siendo requisito la experiencia en trazar el gráfico de funciones del tipo $y = \boldsymbol{a}f\,(bx+ c) + d$, incluyendo la investigación de los efectos que se producen al cambiar los parámetros a, b, c, d en la gráfica $y = f\,(x)$. Por consiguiente, después de las experiencias adecuadas con utilidades gráficas usando la computadora, serán capaces de esbozar sin ayuda de la computadora, la gráfica de una función como $y = 3\text{sen}(x+2)$ aplicando dos transformaciones: traslación de dos unidades a izquierda y multiplica por tres, a la función $y = \text{sen}(\boldsymbol{x})$.

La Trigonometría no sólo es una herramienta poderosa e importante para la ciencia y la tecnología, sino también tiene un gran atractivo estético para muchos estudiantes debido a sus regularidades y simetrías. La disponibilidad de calculadoras científicas y computadoras hacen que ambos aspectos de este tema sean accesibles a un mayor número de estudiantes del nivel Secundaria. Esto facilita a su vez una mayor integración de la Trigonometría con la Geometría y el Álgebra.

2.4. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES

René Descartes, filósofo y matemático francés (1596 - 1650) fue el primero que descubrió e implemento el método de las coordenadas para indicar la posición de un punto (en el plano), por eso se habla de coordenadas cartesianas rectangulares.

Par Ordenado: Dados dos números reales a y b, se llama par ordenado de primera componente a y segunda componente b a la expresión (a , b).

Definción: Si (a , b) y (c , d) son pares ordenados: $(a , b) = (c , d) \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$.

Si $(a , b) = (c , d)$ y $(c , d) = (m , n)$, entonces $(a , b) = (m , n)$.

Plano Cartesiano de R: Se denomina plano cartesiano (o sistema cartesiano rectangular), al conjunto de pares ordenados: $\mathbf{R}^2$, definido mediante:

$$\mathbf{R}^2 = \{ (x , y) \ / x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \}$$

Representación Geométrica del Plano $\mathbf{R}^2$: Se toman en el plano dos rectas euclidianos mutuamente perpendiculares ***X*** e ***Y***, provistos de un sistema de coordenadas. Estas rectas se intersectan en un punto ***O*** de coordenadas (0 , 0). De esta manera se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares para el plano, el cual permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de éste y los pares ordenados de números reales. Es decir una bisección en el plano como se ilustra en la *figura 5*:

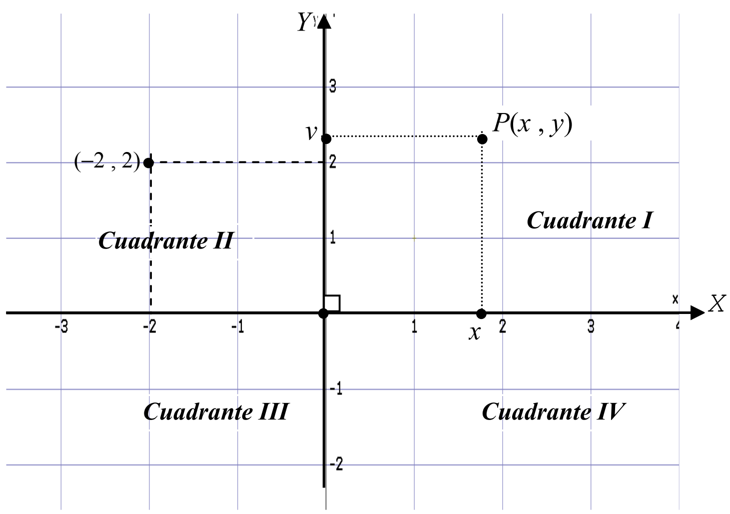


Figura 5

En la figura 5, a la recta ***X*** de la figura, se le llama eje de las ***X*** (o de las abscisas). La recta ***Y*** es el eje ***Y*** (o de las ordenadas). El punto de intersección es el origen del sistema. Si al punto P del plano le corresponde el par ordenado (x , y) de números reales con x en ***X*** e y en ***Y***; diremos que x e y son coordenadas de P, siendo x su abscisa y y su ordenada. En la notación habitual se identifica al punto ***P*** con (x , y) y se escribe: $P = (x , y)$ ó $P(x , y)$.

NOTA: Se denominan cuadrantes a cada uno de las cuatro regiones en que queda dividido el plano por las rectas numéricas ***X*** e ***Y***, figura 5.

Distancia entre dos puntos en $\mathbf{R}^2$:

Dados dos puntos $P = (x\ , y)$ y $Q = (x'\ , y')$ del plano $\mathbf{R}^2$, la distancia de P a Q es el número real $\mathrm{d}(P\ , Q) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, que satisface los siguientes propiedades:

i) $\mathrm{d}(P\ , Q) \geq 0$

ii) $\mathrm{d}(P\ , Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

iii) $\mathrm{d}(P\ , Q) = \mathrm{d}(Q\ , P)$

iv) $\mathrm{d}(P\ , Q) \leq \mathrm{d}(P\ , R) + \mathrm{d}(R\ , Q)$

Por ejemplo, dados los puntos $P = (-1\ , 1)$ y $Q = (2\ , 5)$, en $\mathbf{R}^2$, se tiene:

$$\mathrm{d}(P\ , Q) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Simetrías en el Plano Cartesiano $\mathbf{R}^2$: Dos puntos ***A*** y ***A'*** son simétricos respecto a una recta $\mathcal{L}$, si $\mathcal{L}$ es la mediatriz del $\overline{AA'}$. Para un punto $P = (a, b)$, los puntos simétricos de P respecto a los ejes de coordenadas, respecto al origen y también respecto a la diagonal principal, $y = x$, se obtienen por reflexión. Cuyo efecto geométrico se muestra en la *figura 6*:

1) El simétrico de *P* respecto al eje *X* es $S_x(a\ , b) = (a\ , -b)$

2) El simétrico de *P* respecto al eje *Y* es $S_y(a\ , b) = (-a\ , b)$

3) El simétrico de *P* respecto al origen de coordenadas es $S_0(a\ , b) = (-a\ , -b)$.

4) El simétrico de *P* respecto a la recta diagonal $y = x$ es $S_D(a\ , b) = (b\ , a)$.

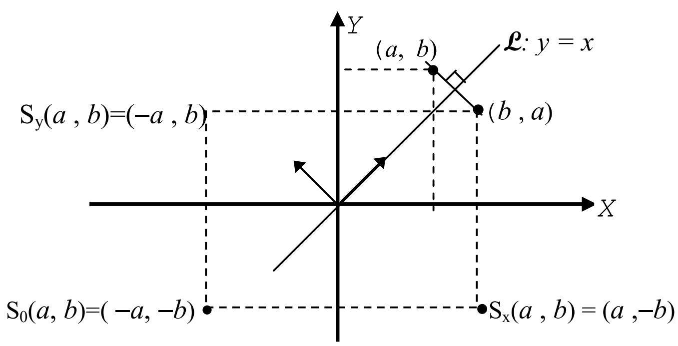


Figura 6

Prueba de (4), demostración vectorial:

Sea $\mathcal{L}$ recta de ecuación $y = x$, entonces $\mathcal{L} = \{(x\ , y) \in \mathrm{R}^2 / (x\ , y) = (x\ , x)\}$, o

$\mathcal{L} = \{(x\ , x) / x \in \mathbf{R}\} = \{x(1\ , 1) / x \in \mathbf{R}\}$, siendo su ecuación vectorial es:

$\mathcal{L} : t(1\ , 1), t \in \mathbf{R}$, donde el par: $(1\ , 1)$ es el vector que da dirección a la recta $\mathcal{L}$.

Hallando P' = $\mathbf{S_D}(a\ , b) = (b\ , a)$

Los vectores $(1\ , 1)$ y $(-1\ , 1)$ forman una base ortogonal de $\mathbf{R}^2$, entonces $P = (a\ , b)$ es combinación lineal de estos vectores

P' $= \mathrm{S_D}(\boldsymbol{P})$ está a igual distancia de ***P***, respecto a la recta $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ mediatriz de ***PP'***).

En efecto, tenemos: $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{QP}}$, entonces $(a\ , b) = t(1\ , 1) + s(-1\ , 1)$ .... (*)

Multiplicando escalarmente por $(-1\ , 1)$ y $(1\ , 1)$ a la igualdad (*), se obtiene:

$(a\ , b).(1\ , 1) = 2t \Rightarrow t = \dfrac{a+b}{2}$ y $(a\ , b).(-1\ , 1) = 2s \Rightarrow s = \dfrac{b-a}{2}$

como $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} = t(1\ ,\ 1) \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} = (\frac{a+b}{2})(1\ ,\ 1) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

pero

$\overrightarrow{\boldsymbol{QP'}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} \Rightarrow \boldsymbol{P'} - \boldsymbol{Q} = -(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}) \Rightarrow \boldsymbol{P'} = 2\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} \Rightarrow S_D(\boldsymbol{P}) = 2\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$.

$$\Rightarrow S_D(\boldsymbol{P}) = 2\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) - (a, b) \Rightarrow S_D(\boldsymbol{P}) = (b\ ,\ a)$$

$\therefore\ \boldsymbol{P'} = S_D(\boldsymbol{P}) = (b\ ,\ a)$.

2.4.1. La circunferencia unitaria:

Se llama circunferencia de centro O y radio r, representado con $\mathcal{C}_r(O)$, al conjunto de puntos $P = (x\ ,\ y) \in \mathbf{R}^2$, cuya distancia al origen de coordenadas es r. Es decir:

$\mathcal{C}_r(O) = \{\ P = (x\ ,\ y) \in \mathbf{R}^2 \ /\ d(P\ ,\ O) = r\}$, o

$(x\ ,\ y) \in \mathcal{C}_r(O) \Leftrightarrow d(P, O) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$.

Si $r = 1$, la circunferencia $\mathcal{C}_1(O)$ se llama ***circunferencia unitaria***, cuya ecuación para los puntos $P = (x\ ,\ y) \in \mathbf{R}^2$, es: $d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

De donde: $\mathcal{C}_1(O) = \{(x\ ,\ y) \in \mathbf{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 = 1\}$.

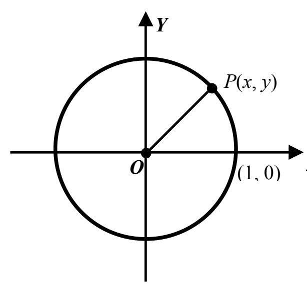


***Figura* 7**

Según lo anterior: $(x\ ,\ y) \in \mathcal{C}_1(O) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

El punto $P(3/5\ ,\ 4/5) \in \mathcal{C}_1(O)$, pues $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 9/25 + 16/25 = 1$.

También los puntos simétricos $S_X(P) = (3/5, -4/5)$, $S_Y(P) = (-3/5, 4/5)$, $S_0(P) = (-3/5, -4/5)$ y $S_D(P) = (4/5, 3/5)$ satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$; es decir, pertenecen a la $\mathcal{C}_1(O)$.

2.4.2. Arcos y ángulo central en la circunferencia unitaria:

Se denomina arco de circunferencia a la porción de arco contenido en la circunferencia que une dos puntos distintos de ella.

Los puntos tomados que no sean extremos del diámetro, dividen a la circunferencia en un arco menor y un arco mayor. En la *figura 8*, se tiene:

Arco menor: $\overset{\frown}{AMB}$ y Arco mayor $\overset{\frown}{ANB}$

El arco menor determina un ángulo central menor (convexo) con vértice en el centro de la circunferencia.

El arco mayor determina un ángulo central mayor (cóncava) con vértice en el centro de la circunferencia.

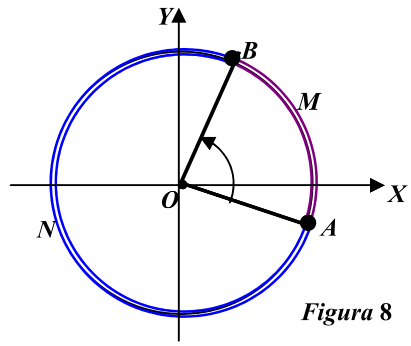


***Figura* 8**

2.4.3. Longitud de arco y medidas angulares:

En una circunferencia de radio r, sean θ: la medida del ángulo central y s la longitud del arco de circunferencia contenido en el interior del ángulo. Estas medidas son proporcionales a 2π, la medida angular de la circunferencia, y a $2\pi r$, longitud de la circunferencia; es decir:

Medida angular → Longitud	***Proporción***	***Longitud de arco***
2π $2\pi r$ θ s	$\dfrac{2\pi\ rad}{\theta\ rad} = \dfrac{2\pi\, r}{s}$	$s = \theta\, r$ Para $r = 1$, $s = \theta$

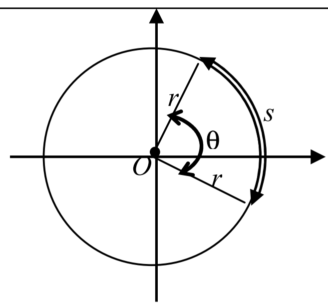


***Figura* 9**

2.4.4. Arcos y ángulos orientados:

En una circunferencia $\mathcal{C}_r(O)$ de centro O y radio $r > 0$, dados dos puntos $P \neq Q$, se tienen los arcos $\overset{\frown}{PMQ}$ y $\overset{\frown}{PNQ}$ que pasan por M y N, respectivamente:

- El arco $\overset{\frown}{PMQ}$, asociado al par $(P\ ,Q)$, define un arco orientado de punto inicial P y punto terminal Q, que se denota por $\overrightarrow{PMQ}$ o $\overleftarrow{QMP}$ (Figura 10-**a**)
- El arco $\overset{\frown}{PMQ}$, asociado al par $(Q\ ,\ P)$, define un arco orientado de punto inicial Q y punto terminal P, que se denota por $\overrightarrow{QMP}$ o $\overleftarrow{PMQ}$ (Figura 10-**b**)

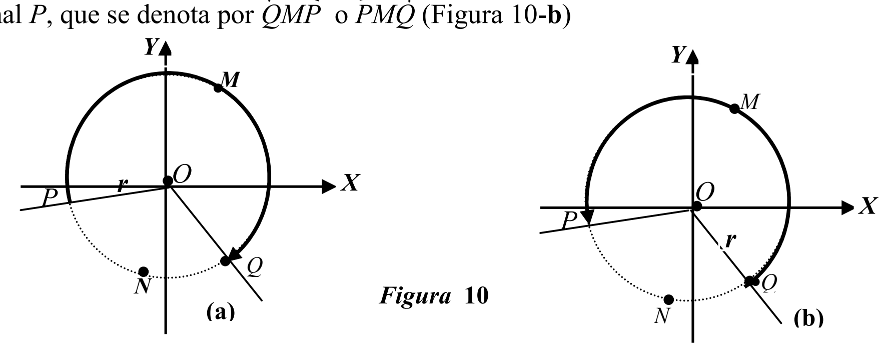


***Figura* 10**

Los árabes, primeros estudiosos de la Trigonometría descubrieron que la tierra gira de este a oeste, y teniendo en cuenta ello determinaron los signos al girarse entorno a una circunferencia, actualmente se traduce ello: si es en **sentido antihorario**, la **orientación positiva**; y si es en **sentido horario**, la **orientación es negativa**.

Así, el ángulo $\widehat{POQ}$ asociado al arco orientado $\overset{\frown}{PMQ}$, determina el ángulo orientado $\widehat{POQ}$ de lado inicial $\overrightarrow{OP}$ y lado terminal $\overrightarrow{OQ}$; y se muestra en la figura 11:

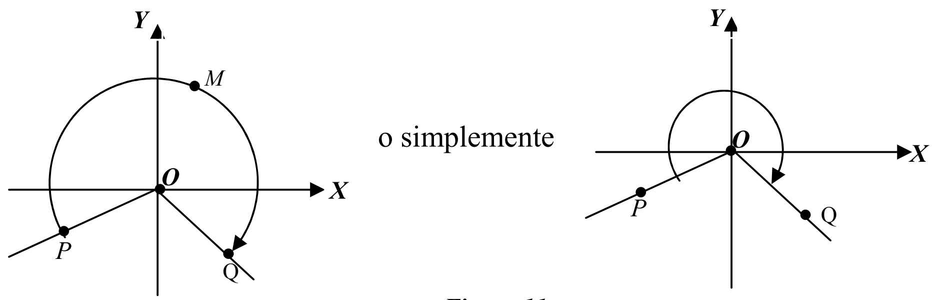


Figura 11

Análogamente, asociando el arco $\widehat{QNP}$ al ángulo $\widehat{POQ}$, se tiene el ángulo orientado: $\widehat{QOP}$ con lado inicial $\overrightarrow{OQ}$ y lado terminal $\overrightarrow{OP}$, como se muestra gráficamente.

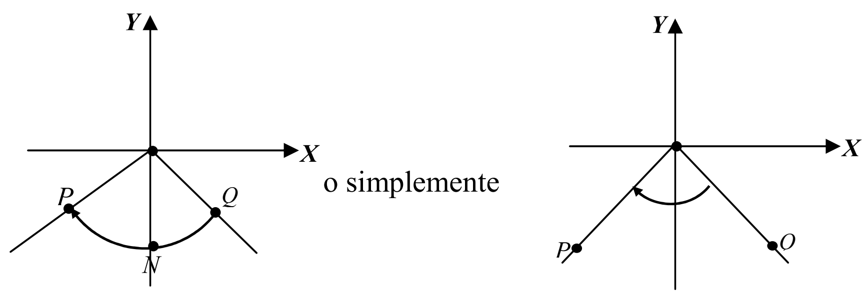


Figura 12

En la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_1(O)$ de centro $O = (0\ ,\ 0)$ y radio $r = 1$, dada por los puntos $(x\ ,y)$ tales que $x^2 + y^2 = 1$; los arcos orientados con extremo inicial fijo $A = (1, 0)$ y extremo terminal $P = (x\ , y)$ se tiene longitud de arco dado por un número real θ:

En la $\mathcal{C}_1(O)$, un arco orientado definido por $\alpha \in \mathbf{R}$, de extremo inicial $A = (1\ ,\ 0)$ y extremo terminal $B = E(\alpha)$, define un ángulo orientado $\widehat{AOB}$, con vértice en O, el origen de coordenadas, y que se genera al rotar el lado inicial $\overrightarrow{OA}$ alrededor de O hasta la posición $\overrightarrow{OB}$.

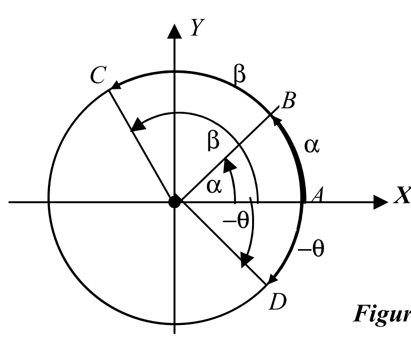


***Figura* 13**

Definición: Para $\alpha \in \mathbf{R}$, $A = (1\ ,\ 0)$ y $B = \text{E}(\alpha)$ en $\mathcal{C}_1(O)$, la medida del ángulo orientado $\widehat{AOB}$, en radianes, es α; y se denota $\alpha = m(\widehat{AOB})$.

En tal caso, la orientación del ángulo está determinada por α; y la orientación y la longitud del arco orientado $\widehat{AB}$ están dados por α, se tiene: $\alpha = m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$, en radianes.

En la medición de ángulos, el **Sistema Internacional** de Medidas establece como unidad el ***radián*** (***rad***); donde un ángulo de un radián (1 ***rad***).

Definición: Un **radián** es la medida del ángulo central de una circunferencia subtendido por un arco de longitud igual al radio de dicha circunferencia.

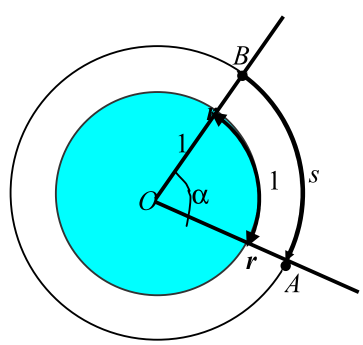
La medida de un ángulo orientado se define por $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$, es decir como $\dfrac{1}{2\pi}$ de la longitud de $\mathcal{C}_1(O)$. Como un ángulo orientado generado por una vuelta del lado inicial alrededor de su vértice y en sentido antihorario es definido por $\theta = 2\pi$, se tiene que $m(\mathcal{C}_1(O)) = \theta$ rad $= 2\pi$ rad.

Existen otros sistemas para medir ángulos, como el Sistema Sexagesimal o el Sistema Centesimal, cuyas unidades son el grado sexagesimal o simplemente ***grado***(º) y el grado centesimal, respectivamente. En el **Sistema sexagesimal**, un ángulo de un grado (1º) es la medida de un ángulo orientado, definido por $\alpha = \dfrac{1}{360}$, que corresponde a $\dfrac{1}{360}$ de 2π, la longitud de $\mathcal{C}_1(O)$; es decir: $1^\circ = \dfrac{1}{360}\times 2\pi$ rad $= \dfrac{2\pi}{360}$ rad. De esto, un ángulo orientado generado por una vuelta del lado inicial alrededor de su vértice y en sentido antihorario mide $2\pi \times 1$rad $= 2\pi$ rad $= 360\times 1^\circ = 360^\circ$, expresión que relaciona medición de ángulos o arcos en los sistemas radial y sexagesimal.

Más precisamente: Si S y R las medidas de un ángulo orientado en los sistemas sexagesimal y radial, respectivamente, por la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{S}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{ó} \quad \boxed{\frac{S}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}}$$

Relación que permite hacer diversas conversiones entre medidas en sistemas radial y sexagesimal.



En la $\mathcal{C}_r(O)$, un ángulo central de medida α rad y arco comprendido en él de longitud s, cumple:

-) $s = r.\alpha$;

-) $\alpha = 1$ radián $\Leftrightarrow$ $r = s$

-) $C = 2\pi\, r = 2\pi$ radios y $m(\widehat{C}) = 2\pi$ rad.

-) Si $r = 1$, entonces $s = \alpha$.

Figura **14**

2.4.5. Función Envolvente

Existe una función E: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{C}_1(O)$, que hace corresponder a cada número $\theta \in \mathbf{R}$, un único punto $E(\theta) = (x , y)$ de $\mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$, llamada ***función envolvente*** de $\mathcal{C}_1(O)$. Con las siguientes propiedades:

1. El dominio de E es **R**, el conjunto de todos los números reales.
2. El rango de E es la circunferencia unitaria en posición estándar: $\mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + x^2 = 1$.
3. Las coordenadas (x , y) de cada punto del rango satisfacen: $x^2 + x^2 = 1$.
4. E está especificada por $E(\theta) = (x , y)$.

Además:

i) Si $\theta = 0$, se tiene el punto fijo: $E(0) = A = (1, 0)$.

ii) Si $\theta > 0$, partiendo de A se describe el arco orientado con extremo terminal $E(\theta)$, recorriendo la circunferencia en sentido antihorario hasta describir un arco de longitud θ.

iii) Si $\theta < 0$, partiendo de A se describe el arco orientado con extremo terminal $E(\theta)$, recorriendo la circunferencia en sentido horario hasta describir un arco de longitud $|\theta| = -\theta$.

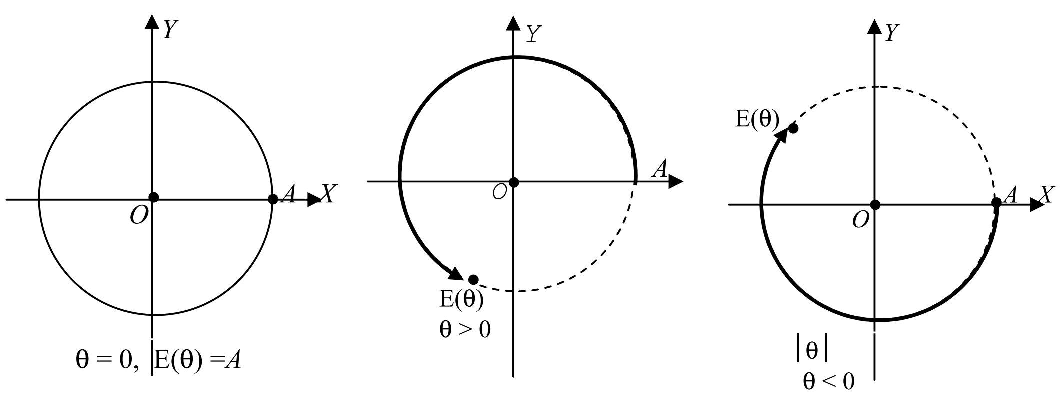


***Figura* 15**

Definición: Una función real f es ***periódica*** de período $\boldsymbol{p}$, si:

$$f(x + \boldsymbol{p}) = f(x),$$

para todo x y $(x + \boldsymbol{p})$ en el dominio de f.

La función envolvente E es periódica, de período 2π; es decir: $E(\theta+2\pi) = E(\theta)$ ó $E(\theta + 2k\pi) = E(\theta)$, para todo $\theta \in \mathbf{R}$ y para $k \in \mathbf{Z}$, y para $0 < l < 2\pi$ se tiene $E(\theta + l) \neq E(\theta)$; y al describir un arco de una vuelta a $\mathcal{C}_1(O)$ se recorre un arco de longitud 2π, y se cumple que:

$E(\theta + 2\pi) = E(\theta - 2\pi) = E(\theta)$, $\forall\ \theta \in \mathbf{R}$. Siendo 2π el período fundamental de E.

Definición: Dos o más arcos orientados con un mismo punto inicial y un mismo punto terminal son **coterminales**. Así, en $\mathcal{C}_1(O)$, los arcos con punto inicial $A = (1\ ,\ 0)$ y un mismo punto terminal E(θ), se denominan ***arcos coterminales***. Por ejemplo:

1) Como $E(\pi/2) = E(\pi/2 + 2k\pi) = B = (0\ ,\ 1)$; $\forall\ k \in \mathbf{Z}$, los arcos orientados definidos por $\pi/2$ y por $\pi/2 + 2k\pi$ son coterminales;

2) Como $E(\pi) = E(\pi+2k\pi) = C = (-1, 0)$; $\forall\ k \in \mathbf{Z}$, los arcos orientados definidos por π y $\pi+2k\pi$ son coterminales;

3) Se tiene $E(3\pi/2) = E(-\pi/2) = D = (0\ ,\ -1)$; es decir, los arcos arientados definidos por $3\pi/2$ y $-\pi/2$, son coterminales;

4) $E(\pi/4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = E(9\pi/4) = E(-7\pi/4) \in \mathcal{C}_1(O)$. Luego, los arcos definidos por $\pi/4$, $9\pi/4$ y $-7\pi/4$ son coterminales.

5) En general, para todo $P = (x\ ,\ y) \in \mathcal{C}_1(O)$ y $\forall\ \theta \in \mathbf{R}$, para un arco orientado definido por θ con extremo inicial $A = (1\ ,\ 0)$ y extremo terminal E(θ), tal que $E(\theta) = E(\theta + 2k\pi)$, arcos orientados dados por θ y $\theta + 2k\pi$, son coterminales (*figura 16*).

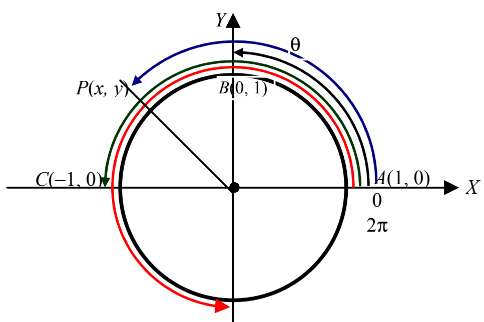


Figura 16

2.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

2.5.1. Las funciones seno y coseno:

Para la $\mathcal{C}_1(O) \subset \mathbf{R}^2$, dada por la ecuación: $u^2 + v^2 = 1$, se tienen las funciones:

Primera proyección: $Pr_1: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $Pr_1(u\ ,\ v) = u$;

Segunda proyección: $Pr_2: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $Pr_2(u\ ,\ v) = v$;

Función Envolvente: $E: \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{C}_1(O) \subset \mathbf{R}^2$, tal que $E(\theta) = (u\ ,\ v)$, con $u^2 + v^2 = 1$.

Considerando estas funciones, se definen otras funciones reales, como sigue:

1) FUNCIÓN COSENO:

Es la función denotada por cos, definida por la función compuesta:

$\cos = Pr_1 o E: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tal que: $\cos(\theta) = (Pr_1 o E)(\theta) = Pr_1(E(\theta)) = Pr_1(u\ ,\ v) = u$, abscisa de E(θ).

2) FUNCIÓN SENO:

Es la función denotada por sen, definida por la función compuesta:

sen = Pr_2oE: **R** → **R**, tal que sen(θ) = (Pr_2oE)(θ) = Pr_2(E(θ)) = $Pr_2(u , v) = v$, ordenada de E(θ).

EJEMPLOS:

a) Como E(π/4) = E(−7π/4) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, se tiene: cos(π/4) = cos(−7π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y sen(π/4) = sen(−7π/4) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

b) Como E(π/3) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y E(4π/3) = $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, se tiene: cos(π/3) = $\frac{1}{2}$, cos(4π/3) = $-\frac{1}{2}$, sen(π/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y sen(4π/3) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Si θ ∈ **R** tal que: cos(θ) = 0, se tiene E(θ) = (0, v), puntos del eje Y. Luego: θ = kπ, k∈ **Z**.
E(θ) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, si ***C*** es conjunto solución de cos(θ) = 0, entonces ***C*** = {θ = π/2 + kπ / k∈**Z**}

d) Si θ ∈ **R** tal que: sen(θ) = 0, se tiene E(θ) = (u, 0), puntos del eje X. Luego: θ = kπ, k ∈ **Z**.
Para E(θ) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, si ***D*** es conjunto solución de sen(θ) = 0, entonces ***D*** = {θ = kπ / k ∈ **Z**}.

2.5.2. La función tangente, cotangente, secante y cosecante:

De las funciones seno y coseno, se definen otras funciones trigonométricas:

3) FUNCIÓN TANGENTE: Denota por tan, es la función cociente de las funciones seno y coseno, es decir tan = $\frac{sen}{\cos}$ y tan(θ) = $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$, ∀ θ ∈ **R** – ***C***, con ***C*** = {θ = π/2+kπ / k∈ **Z** }

4) FUNCIÓN COTANGENTE: Denotada por cot, es la función cociente de las funciones coseno y seno, siendo cot = $\frac{\cos}{sen}$ y cot(θ) = $\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$, ∀ θ ∈ **R** –***D***, con ***D*** = {θ = kπ / k∈ **Z**}.

5) FUNCIÓN SECANTE: Se denota por sec, es la función recíproca de la función coseno, es decir sec = $\frac{1}{\cos}$ y sec(θ) = $\frac{1}{\cos(\theta)}$, ∀ θ ∈ **R** – ***C***, donde ***C*** = {θ = π/2 + kπ / k ∈ **Z**}.

6) FUNCIÓN COSECANTE: Se denota por csc, es la función recíproca de la función seno; es decir csc = $\frac{1}{sen}$ y csc(θ) = $\frac{1}{sen(\theta)}$, ∀ θ ∈ **R** – ***D***, con ***D*** = {θ = kπ / k ∈ **Z**}.

Ejemplos:

1. El lado terminal de un arco orientado es E(θ) = (4/5 , −3/5) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$; entonces, por definición las funciones trigonométricas se tiene:

sen(θ) = −3/5	cos(θ) = 4/5	tan(θ) = −3/4
csc(θ) = −5/3	sec(θ) = 5/4	cot(θ) = −4/3

2. Dado cos(θ) = –2/5 y π/2 < θ <π. Hallar sen(θ) y tan(θ).

   En E(θ) = (u , v), se tiene $u^2 + v^2 = 1$, cos(θ) = u y sen(θ) = v. Luego, $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

   Como cos(θ) = –2/5, entonces $(-2/5)^2 + \text{sen}^2(\theta) = 1$ y $\text{sen}^2(\theta) = 21/25$, de donde sen(θ) = $\pm\sqrt{21}/5$. Como π/2 < θ < π, se tiene que E(θ) = (u , v) está en el segundo cuadrante; es decir, $v > 0$. Luego v = sen(θ) = $\sqrt{21}/5$, luego: tan(θ)= $\dfrac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

DEFINICIÓN: Dado una función real de variable real f:

-) Si ***f*(–*x*) = *f*(*x*),** entonces la función f es una **función par**.

-) Si ***f*(–*x*) = –*f*(*x*),** entonces la función f es una **función impar**.

PROPOSICIÓN 1. Para θ ∈ **R**, en $\mathcal{C}_1(O)$; se cumple:

i) sen(–θ) = –sen(θ); es decir, la función **seno** es ***función impar***.

ii) cos(–θ) = cos(θ); es decir, la función **coseno** es ***función par***.

iii) sen(θ + π) = – sen(θ);

iv) cos (θ + π) = – cos(θ)

Demostración:

Si E(θ) = (u , v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene E(–θ) = (u , –v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$; es decir, los puntos E(θ) = (u , v) y E(–θ) = (u , –v) son simétricos respecto al eje X, como se ilustra en la **figura 16**. Luego:

i) sen(–θ) = –v = – sen(θ); y **ii)** cos(–θ) = u = cos(θ).

También, si E(θ) = (u, v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$, se tiene E(θ + π) = (– u , –v) ∈ $\mathcal{C}_1(O)$; es decir, los puntos E(θ) = (u , v) y E(θ + π) = (– u , –v) son simétricos respecto al origen O, como se ilustra en la figura 17. Luego:

iii) sen(θ + π) = –v = –sen(θ); y **iv)** cos(θ + π) = – u = –cos(θ).

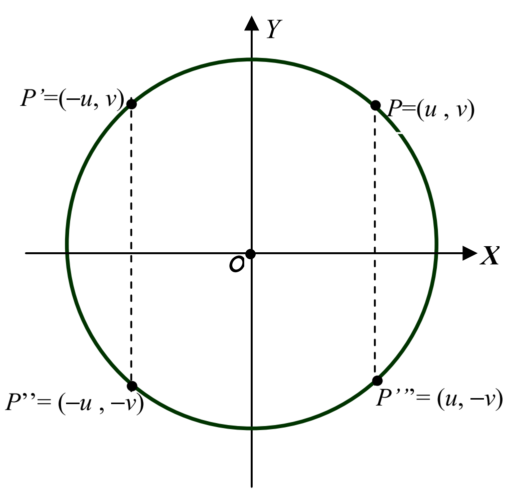


***Figura* 17**

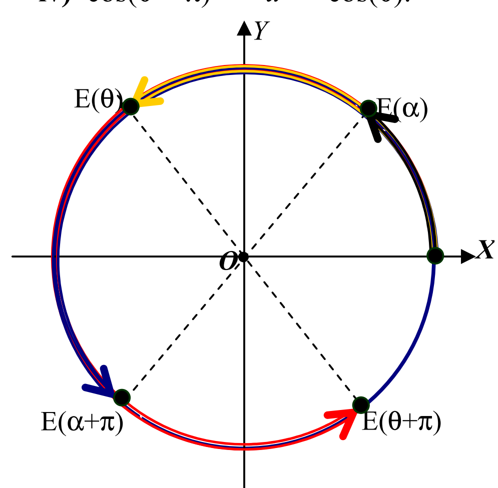


***Figura* 18**

PROPOSICIÓN 2.: Las funciones trigonométricas son periódicas.

i) El período de las funciones: seno, coseno, secante y cosecante es ***2*π**.

ii) El período de la función: tangente y cotangente es π.

Demostración:

En $\mathcal{C}_1(O)$, sea θ tal que $\theta = \theta + 2\pi k$ y sea $A = (1\ ,\ 0)$, para todo $P = (u\ ,\ v) = E(\theta) \in \mathcal{C}_1(O)$, siendo

$E(\theta) = E(\theta + 2\pi)$:

i) $\mathrm{sen}(\theta + 2\pi) = \mathrm{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta)$.

$\mathrm{sen}(\theta + 4\pi) = \mathrm{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta + 4\pi) = \cos(\theta)$.

$\mathrm{sen}(\theta + 6\pi) = \mathrm{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta + 6\pi) = \cos(\theta)$.

En general:

$\mathrm{sen}(\theta + 2k\pi) = \mathrm{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta),\ \forall\, k \in \mathbf{Z}$.

Procediendo en forma análoga:

$$\sec(\theta + 2k\pi) = \frac{1}{\cos(\theta + 2k\pi)} = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta),\ \ \theta \neq \pi/2,\ \forall\, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\csc(\theta + 2k\pi) = \frac{1}{sen(\theta + 2k\pi)} = \frac{1}{sen(\theta)} = \csc(\theta),\ \ \theta \neq \pi,\ \forall\, k \in \mathbf{Z}.$$

$\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta),\ \theta \neq \pi/2,$ $\qquad \cot(\theta + k\pi) = \cot(\theta),\ \theta \neq \pi;\ \ \forall\, k \in \mathbf{Z}$.

NOTA: Dados α y θ, dos arcos en una circunferencia unitaria, con $\alpha + \theta = \pi/2$; las funciones f y g se dice que son cofunciones, si $f(\alpha) = g(\pi/2 - \theta)$.

PROPOSICIÓN 3. <u>*Propiedad de cofunciones*</u>: Para $\theta \in \mathbf{R}$, en $\mathcal{C}_1(O)$; se cumple:

i) $\cos(\pi/2 - \theta) = \mathrm{sen}(\theta)$; $\qquad$ **ii)** $\mathrm{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$;

iii) $\tan(\pi/2 - \theta) = \cot(\theta)$; $\qquad$ **iv)** $\sec(\pi/2 - \theta) = \csc(\theta)$.

Demostración:

En $\mathcal{C}_1(O)$, sea θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y sean $A = (1\ ,\ 0)$ y $B = (0\ ,\ 1)$ y $C = E(\theta)$.

Entonces $m(\overset{\frown}{AOB}) = \pi/2$, $m(\overset{\frown}{AOC}) = \theta$ y $m(\overset{\frown}{BOC}) = \pi/2 - \theta$.

Por otro lado, existe un único punto $D = E(\pi/2 - \theta)$ en $C_1(O)$ tal que $m(\overset{\frown}{AOD}) = \pi/2 - \theta$, siendo C y D puntos simétricos respecto a la recta $y = x$, como puede apreciarse en la figura 18.

Luego, si $C = E(\theta) = (r\ ,\ s)$, entonces $D = E(\pi/2 - \theta) = (s\ ,\ r)$. De esto:

i) $\cos(\theta) = s = \mathrm{sen}(\pi/2 - \theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta) = r = \cos(\pi/2 - \theta)$;

ii) $\cot(\theta) = s/r = \tan(\pi/2 - \theta)$, $r \neq 0$ y $\tan(\theta) = r/s = \cot(\pi/2 - \theta)$, $s \neq 0$;

iii) $\csc(\theta) = 1/r = \sec(\pi/2 - \theta)$, $r \neq 0$ y $\sec(\theta) = 1/s = \csc(\pi/2 - \theta)$, $s \neq 0$

Si θ es la medida en radianes de un ángulo, con $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la medida de su complemento es $\pi/2 - \theta$. Las igualdades anteriores nos indican que: el coseno de θ es el seno de su complemento, la cotangente de θ es la tangente de su complemento y la cosecante de θ es la secante de su complemento. Por ello, seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante, los denominamos cofunciones.

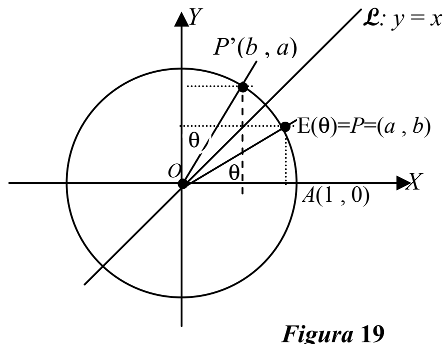


***Figura* 19**

2.5.3. Razones trigonométricas de ángulos:

Para un ángulo orientado $\widehat{AOB}$, de lados inicial $\overrightarrow{OA}$ y terminal $\overrightarrow{OB}$ y vértice O, se fija un sistema de coordenadas rectangulares de origen O y con $\overrightarrow{OA} \subset \boldsymbol{X}$ y eje $\boldsymbol{Y} \perp \boldsymbol{X}$ en O.

Entonces se dice que el ángulo dado es un ***ángulo en posición normal***.

Sea $m(\widehat{AOB}) = \theta$ rad, que también puede estar expresado en (°) sexagesimal.

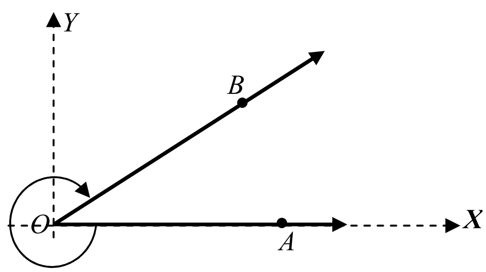
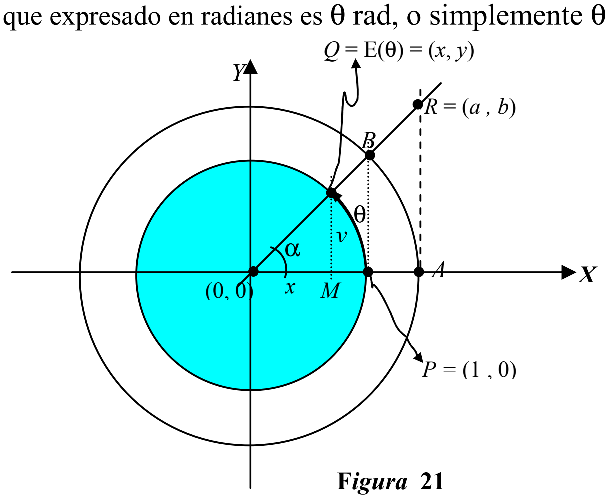


***Figura* 20**

Con centro O, se construye una circunferencia de radio 1, que intercepta a los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ del ángulo $\widehat{AOB}$ en los puntos P y Q, respectivamente, donde $P = (1\ ,\ 0)$, y se describe un único arco orientado en $\mathcal{C}_1(O)$ con puntos inicial P y terminal Q, definido por θ; es decir, $Q = \mathrm{E}(\theta)$.

Recíprocamente, dado un arco orientado en $\mathcal{C}_1(O)$, de punto inicial $P = (1\ ,\ 0)$, punto terminal $Q = \mathrm{E}(\theta)$ y definido por θ, determina un único ángulo en posición normal con vértice O, origen del sistema de coordenadas.

En la figura 20, los triángulos rectángulos OMQ, OPB y OAR, con $d(O\ ,\ R) = r$, son semejantes y se tiene una proporcionalidad entre las longitudes de lados homólogos: $b/r = y/1$, $a/r = x/\ 1$, y $b/a = y/x$. De esto, se definen las razones trigonométricas del ángulo tal que su medida es α°, que expresado en radianes es θ rad, o simplemente $\theta \in \mathbf{R}$:



$\mathrm{sen}(\alpha^{\circ}) = b/r = \mathrm{sen}(\theta)$:

$\cos(\alpha^{\circ}) = a/r = \cos(\theta)$

$\tan(\alpha^{\circ}) = b/a = \tan(\theta)$

$\cot(\alpha^{\circ}) = a/b = \cot(\theta)$

$\sec(\alpha^{\circ}) = r/a = \csc(\theta)$

$\csc(\alpha^{\circ}) = r/b = \csc(\theta)$

***Figura* 21**

Ejemplos:

a) Para un ángulo de 30^o, se tiene el ángulo orientado en posición normal dado por $\theta = \pi/6$ rad $= \pi/6$. Entonces: $\text{sen}(30^o) = \text{sen}(\pi/6) = 1/2$, etc.

b) Dado $P = (-5\,,\,2) \in \mathbf{R}^2$, sea $d(O\,,\,P) = r = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ y α^o es la medida del ángulo central. Entonces $\text{sen}(\alpha^o) = 2/\sqrt{29}$ $\cos(\alpha^o) = -5/\sqrt{29}$, $\tan(\alpha^o) = -2/5$, etc.

2.5.4. Gráfica de las funciones trigonométricas

Gráficas de las funciones: $y = \text{sen}(\theta)$ e $y = \cos(\theta)$

La función seno y coseno se definen como coordenadas de $E(\theta) \in C_1(O)$, y para todo número entero k, y θ en radianes o reales se cumple: $\text{sen}(\theta + 2\pi k) = \text{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta+2\pi k) = \cos(\theta)$.

a) propiedades de la función seno:

1. La función $\text{sen}(\theta)$ está definido para todo $\theta \in \mathbf{R}$, por tanto: $\text{dom(sen)} = \mathbf{R}$.
2. De $E(\theta) = (x\,,\,y) \in \mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$, $P_{r2}(x\,,\,y) = y = \text{sen}(\theta)$. Entonces:
   $x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq y^2 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$. Luego, $\text{ran(sen)} = [-1\,,\,1]$.
3. Dado que en la $\mathcal{C}_1(O)$: $E(\theta) = (x\,,\,y)$ y $E(-\theta) = (x\,,\,-y)$, se tiene $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$; es decir, la función $y = \text{sen}(\theta)$, es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.
4. La longitud de $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π y, como $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + 2\pi)$, la función seno tiene período 2π. En general, se cumple: $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + 2k\pi)$, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$.
5. La ecuación $\text{sen}(\theta) = 0$, tiene solución θ para $E(\theta) = (u\,,\,0)$; es decir, $u = 1$ ó $u = -1$. De esto $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc.; es decir, $\theta = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
6. Los intervalos de signo constante para la función seno son:
   $\text{sen}(\theta) > 0$, para $\theta \in]2\pi k, \pi+2\pi k[$, $k \in \mathbf{Z}$;
   $\text{Sen}(\theta) < 0$, para $\theta \in]\pi+2\pi k\,,\,2\pi+2\pi k\,[$, $k \in \mathbf{Z}$
7. La función $\text{sen}(\theta)$ es creciente para $\theta \in]-\pi/2+2k\pi\,,\,\pi/2+2\pi k\,[$, $k \in \mathbf{Z}$, su valor varía de -1 hasta 1; y decreciente para $\theta \in]\pi/2+2\pi k\,,\,3\pi/2+2\pi k\,[$, $k \in \mathbf{Z}$, variando de 1 hasta -1.
8. El valor máximo del $\text{sen}(\theta)$ es 1, para $\theta = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; y su valor mínimo igual a -1, para $\theta = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

De las propiedades descritas, se tiene la gráfica de: $y = \text{sen}(\theta)$, llamada sinusoide.

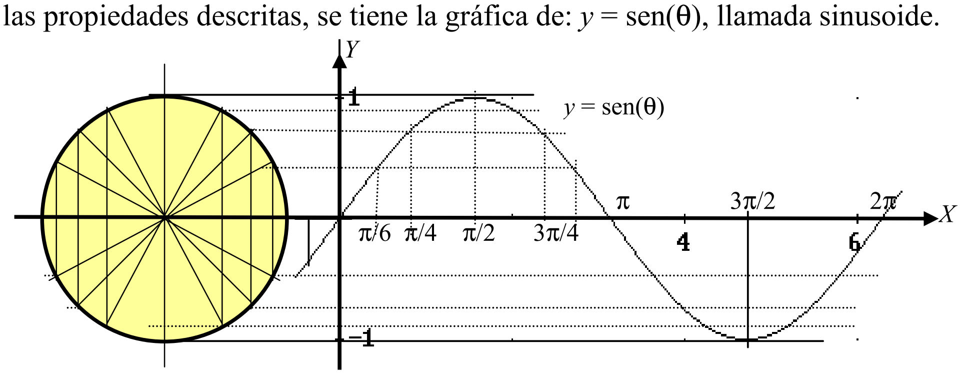


Figura 22

b) propiedades de la función coseno:

1. La función cos(θ) está definido para todo $\theta \in \mathbf{R}$, por tanto: dom(cos) = **R**.

2. Como para $E(\theta) = (x, y) \in \mathcal{C}_1(O)$: $x^2 + y^2 = 1$, $\cos(\theta) = x$. Entonces:
   $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$. Luego, ran(cos) = [–1 , 1].

3. En la $\mathcal{C}_1(O)$: $E(\theta) = (x, y)$ y $E(-\theta) = (x, -y)$, por lo que se tiene: $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$; es decir, la función $x = \cos(\theta)$, es par y su gráfica es simétrica respecto al eje Y.

4. Longitud de la $\mathcal{C}_1(O)$ es 2π y, como $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)$, la función coseno tiene período 2π, siendo: $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi)$, $\forall\ k \in \mathbf{Z}$.

5. La ecuación $\cos(\theta) = 0$, considerando E(θ), tiene solución $\theta = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Los intervalos de signo constante para el coseno son:
   $\cos(\theta) > 0$, para $\theta \in\ ]-\pi/2+2n\pi\ ,\ \pi/2+2\pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$;
   $\cos(\theta) < 0$, para $\theta \in\ ]\pi/2+2\pi n\ ,\ 3\pi/2+2\pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$

7. La función cos(θ) es creciente en $\theta \in\ ]-\pi+2\pi n\ ,\ 2\pi n\ [$, $n \in \mathbf{Z}$ variando desde –1 hasta 1; y es decreciente para $\theta \in\ ]2\pi n\ ,\ \pi+2\pi n\ [$, $n \in \mathbf{Z}$ variando de 1 hasta –1.

8. La función alcanza su valor máximo, igual a 1, para $\theta = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; y valor mínimo igual a –1, para $\theta = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

De las propiedades descritas, se tiene la gráfica de la función: $x = \cos(\theta)$

La gráfica de $x = \cos(\theta)$, se obtiene a partir de del gráfico de $y = \text{sen}(\theta)$, teniendo en cuenta que $\cos(\theta) = \text{sen}(\theta + \pi/2)$, para todo número real θ; es decir, la gráfica de: $x = \cos(\theta)$, es la gráfica de la función seno desplazado π/2 hacia la izquierda a lo largo del eje X.

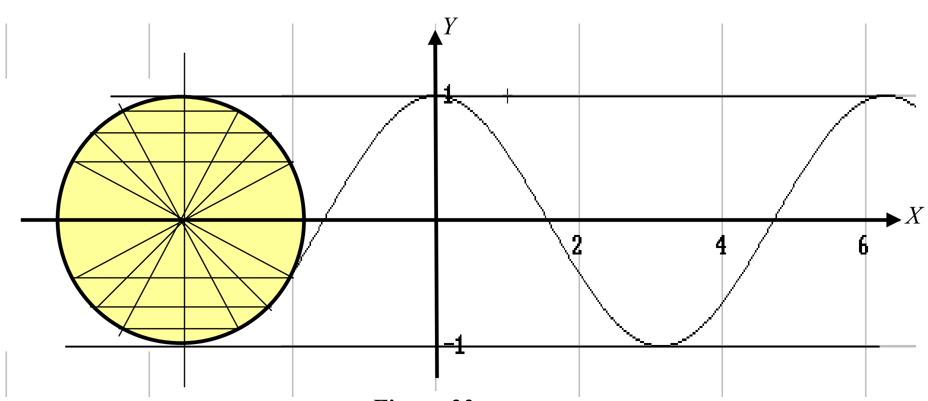


Figura 23

2.5.5. Generalización de las funciones seno y coseno:

Las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, se generalizan en funciones que se expresan de la forma: $y = a\ \text{sen}(bx + c)$ e $y = a\cos(bx + c)$, para a, b, c en $\mathbf{R}-\{0\}$.

Donde:

-) La constante $|a|$, máxima desviación de la gráfica del eje X, se llama **amplitud**.

-) La constante b, comprime o amplia la curva del seno, ***b* altera el período de sen(*x*).**

-) La constante c/b es el desplazamiento de fase (desfasamiento): **sen(*x*)** se desplaza $|c/b|$ unidades hacia la derecha si $c/b < 0$ y, c/b unidades hacia la izquierda si $c/b > 0$.

Este tipo de funciones se usan con frecuencia en el análisis de ondas sonoras y de radio, rayos **X** y gamma, luz visible, radiaciones infrarrojas y ultravioleta, ondas sísmicas y oceánicas, circuitos de generadores eléctricos, vibraciones, construcción de puentes y edificios, entre otros.

TEOREMA: Si $y = a.\text{sen}(bx + c)$ o $y = a.\cos(bx + c)$, donde a, b y c son números reales distintos de cero, entonces:

1) La amplitud es $|a|$ y su período es $2\pi/|b|$

2) Se puede calcular el desplazamiento de fase (desfasamiento) y el intervalo que contiene exactamente un período, resolviendo las dos ecuaciones siguientes: $bx+c = 0$ y $bx+c = 2\pi$.

EJEMPLO: Calcular la amplitud, período y desfasamiento de $y = 3\text{sen}(2x + \pi/2)$.

Solución:

Como la ecuación tiene la forma $y = a.\text{sen}(bx) + c$ donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. Entonces: la amplitud es $|a| = 3$ y el período es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

El desplazamiento de fase (desfasamiento) y el intervalo que contiene que contiene una onda sinusoidal se obtiene de las ecuaciones:

$$2x + \pi/2 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \pi/2 = 2\pi.$$

despejando

$$x = -\pi/4 \quad \text{y} \quad x = 3\pi/4.$$

Así que el desplazamiento es $-\pi/4$, y una onda sinusoidal de amplitud 3 ocupa el intervalo $[-\pi/4\ ,\ 3\pi/4]$, si se traza esa onda y se repite luego a derecha e izquierda, como se muestra en la figura 24:

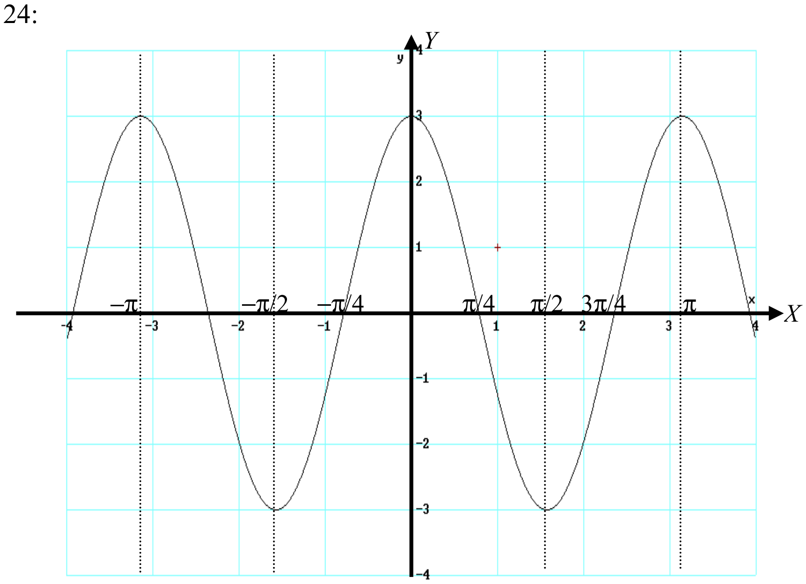


Figura 24

2.5.6. Gráfica de la función: $y = \tan(\theta)$

Como en el caso de las funciones seno y coseno, para obtener la gráfica de la función tangente se consideran las:

Propiedades de la función tangente:

1. Según la definición el dominio de la función tangente es $\{ \theta \in \mathbf{R} / \theta \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$.
2. Los valores de la función tan(θ), es todo los reales, por lo tanto ran(tan) = **R**.
3. La función es impar, puesto que $\tan(-\theta) = \text{sen}(-\theta)/\cos(-\theta) = -\text{sen}(\theta)/\cos(\theta) = -\tan(\theta)$. De esto, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.
4. Es una función periódica y tiene período π: $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$.
5. La ecuación $\tan(\theta) = 0$, tiene solución para $\theta = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
6. Los intervalos de signo constante son:.

   $\tan(\theta) > 0$, para $\theta \in \,]\pi n , \pi/2+\pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$; y,

   $\tan(\theta) < 0$, para $\theta \in \,]-\pi/2+\pi n , \pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. La función tan(θ) es creciente en cada una de los intervalos $]-\pi/2+\pi n , \pi/2+\pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$.

De las propiedades descritas, el gráfico de la función $y = \tan(\theta)$ se obtiene mediante un procedimiento análogo a la construcción de $y = \text{sen}(\theta)$, resultando una curva en donde las rectas verticales $x = \pi/2 + \pi n$, con $n \in$ Z, se llaman asíntotas verticales; como se muestra:

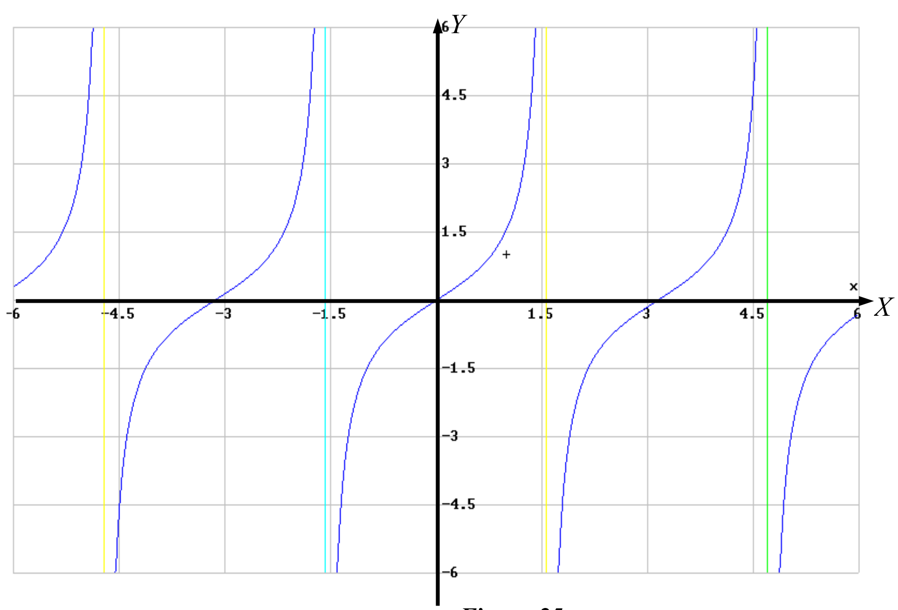


Figura 25

NOTA: Las gráficas correspondientes a las funciones: $y = \cot(\theta)$, $y = \sec(\theta)$ e $y = \csc(\theta)$, se obtienen a partir de la tangente, coseno y seno respectivamente. Siendo sus dominios y rangos correspondientes:

dom(cot) = $\{\theta \in \mathbf{R} / \theta \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ran(cot) = **R**.

dom(sec) = $\{ \theta \in \mathbf{R} / \theta \neq \theta \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$ ran(sec) = $]-\infty , -1] \cup [1 , +\infty [$

dom(csc) = $\{ \theta \in \mathbf{R} / \theta \neq n\pi, n \in \mathbf{Z} \}$ ran(sec) = $]-\infty , -1] \cup [1 , +\infty [$.

2.6. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y GRÁFICAS

DEFINICIÓN: Una función $\boldsymbol{f}$ es **inyectiva** o **uno a uno** si para $a, b \in$ Dom(f):

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

PROPOSICIÓN: Si f :A$\longrightarrow$**R** / $y = f(x)$ es función inyectiva y su rango en $\boldsymbol{B} \subset \mathbf{R}$; existe una función g:$\boldsymbol{B}\longrightarrow$**R**, cuyo rango es A y se cumplen: $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

***Prueba*:**
Como B = ran(f), para cada x de B existe y en A tal que $f(y) = x$; y, como f es inyectiva, el valor y es único. De esto, la correspondencia $x \to y$ define una función g de $\boldsymbol{B}$ en **R**; es decir, se tiene: $g : B \to \mathbf{R}$ tal que: $g(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = f(y)$, de donde ran($g$) $\subset A$; y para cada y en A se tiene $f(y) = x \in B$ y $g(x) = y \in$ ran(g), se tiene $A \subset$ ran(g), o sea ran(g) = A.

Además, en $g(x) = y$, se tiene reemplazando x por $f(y)$, se tiene $g(f(y)) = y$, o sea $(g \circ f)(y) = y$ para $y \in A$; también en $x = f(y)$, reemplazando y por $g(x)$ se tiene $x = f(g(x))$, o sea $(f \circ g)(x) = x$ para $x \in B$. Luego, se cumple: $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

DEFINICIÓN: Si f es una función inyectiva con rango B; a la función g definida por:
$g(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = f(y)$, para cada x en $\boldsymbol{B}$ = ran(f), se llama la ***función inversa*** de la función f, y se denota por $g = f^{-1}$; y cumple: $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$., de donde $f^{-1}(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = f(y)$.

De la definición anterior, para determinar la función inversa f^{-1} de f se sigue los pasos:

1. Hallar dom(f^{-1}) = ran(f) y ran(f^{-1}) = dom(f).
2. Comprobar que f es función inyectiva en su dominio.
3. Despejar x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y, para obtener una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$. De esto, intercambiando x e y, resulta: $y = f^{-1}(x)$, la regla de correspondencia de f^{-1}
4. Comprobar las dos condiciones siguientes:

   a) $(f^{-1} \circ f)(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f.

   b) $(f \circ f^{-1})(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x en el dominio de f^{-1}.

EJEMPLO: Determinar la inversa de $f(x) = x^2 - 3$, para $x \geq 0$, si existe
Solución:

1º El dominio de f es $[0 , +\infty[$ y el rango de f es $[-3 , +\infty[$. Como f es creciente e inyectiva, entonces tiene su función inversa f^{-1} cuyo dominio es $[-3 , +\infty[$, y su rango es $[0 , +\infty[$.

2º Despejando x de la ecuación $y = x^2 - 3$, se tiene: $x = \pm\sqrt{y+3}$, que no es función y restringiendo a $x = \sqrt{y+3}$ resulta función. Haciendo $x = f^{-1}(y)$, la misma que se estribe como: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$, donde x está en el dominio de f^{-1}.

3º Comprobación de (a) y (b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3)$ (definición de f)

$= \sqrt{(x^2-3)+3} = \sqrt{x^2} = x$, para $x \geq 0$ (definición de f^{-1})

b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{(x^2+3})$ (definición de f^{-1})

$= (\sqrt{x+3}) - 3 = (x+3) - 3 = x$, para $x \geq 3$ (definición de f)

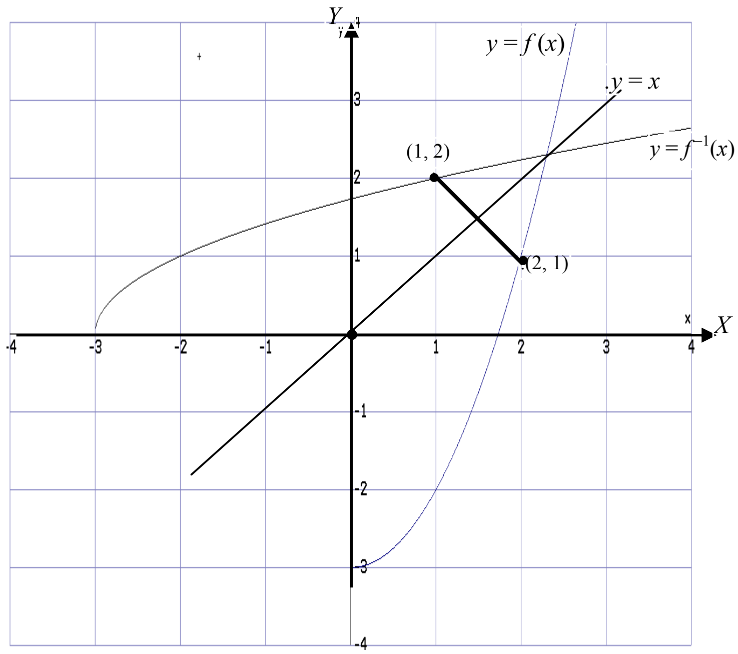


Figura 26

Estas comprobación muestra que la función inversa de f es: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$, siendo las gráficas de f y f^{-1} simétricos respecto a la recta $y = x$, como se muestra en la figura 26.

OBSERVACIÓN: Todas las funciones trigonométricas son periódicas, ninguna es biyectiva sobre su dominio; por lo tanto, ninguno tiene función inversa. Para corregir esta situación, se puede restringir el dominio de modo que la función sea biyectiva sobre él. Entonces, para ese dominio restringido, queda garantizada una función inversa única. Para el cálculo de la inversa se toma un dominio (intervalo) que contiene al origen de coordenadas, a este intervalo se denomina ***intervalo principal***:

2.6.1. Función inversa del coseno:

De la gráfica, la función coseno es inyectiva en el intervalo $[0 , \pi]$, donde su rango es $[-1 , 1]$ y la función $y = \cos(x)$ es decreciente (figura 26). Por lo tanto, la función admite función inversa.

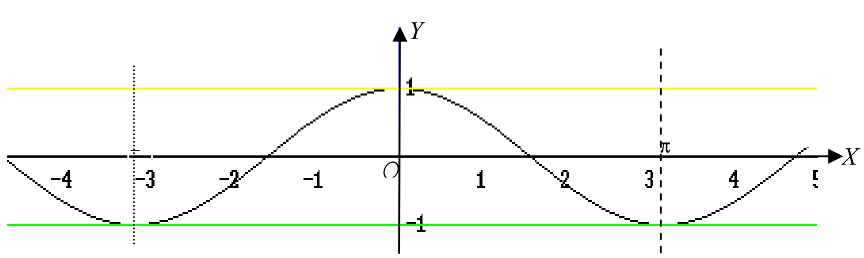


Figura 27: La función $y = \cos(x)$ es uno a uno en $[0 , \pi]$

DEFINICIÓN: La función inversa del coseno, denotado por $\mathbf{cos^{-1}}$ o **arccos** y es llamada arco coseno o coseno inverso, está definida por:

$$\text{arccos} : [-1\ ,\ 1] \longrightarrow [\ 0\ ,\ \pi]\ ,\ \text{donde}\ \ \text{arccos}(x) = y \ \Leftrightarrow\ \cos(y) = x.$$

De la definición, para todo $y \in [0\ ,\ \pi]$ existe un único $x \in [-1\ ,\ 1]$ tal que $\text{arccos}(x) = y$.

Gráfica de $y = \text{arccos}(x)$

Composición del coseno y su inversa:

$\cos(\text{arccos}((x)) = x,\ -1 \le x \le 1$

$\text{arccos}(\cos((x)) = x,\ \ 0 \le x \le \pi$

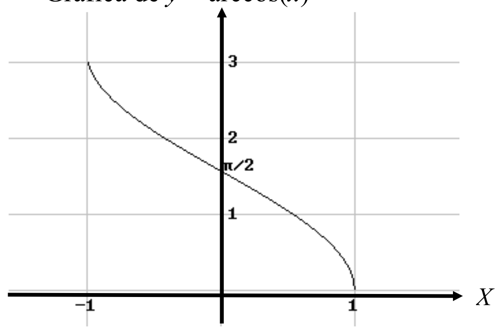


Figura 28

2.6.2. Función inversa del seno:

De la gráfica, la función seno es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$, su rango es $[-1\ ,\ 1]$ y la función $y = \text{sen}(x)$ es creciente (figura 29). Luego, la función seno admite función inversa.

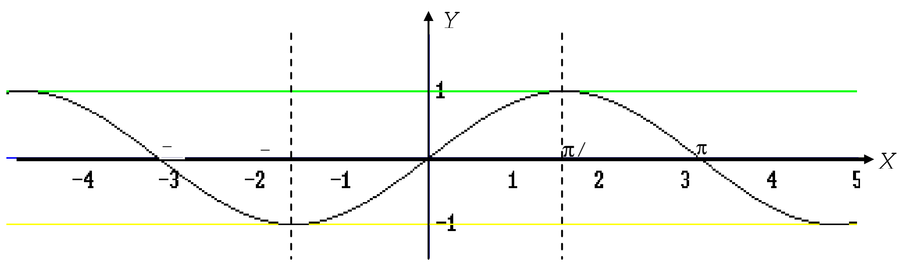


Figura 29: La función $y = \text{sen}(x)$ es uno a uno en $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$

DEFINICIÓN: La función inversa del seno, denotado por $\mathbf{sen^{-1}}$ o **arcsen** y llamada arco seno o seno inversa, es definida por:

$$\text{arcsen} : [-1\ ,\ 1] \longrightarrow [-\pi/2\ ,\ \pi/2]\ ,\ \text{donde arcsen}(x) = y \Leftrightarrow \text{sen}(y) = x.$$

Según la definición: para todo $y \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ existe un único $x \in [-1\ ,\ 1]$ tal que $\text{arcsen}(x) = y$.

Gráfica de $y = \text{arcsen}(x)$.

Composición del seno y su inversa:

$\text{sen}(\text{arcsen}((x)) = x,\ -1 \le\ x\ \le 1$

$\text{arcsen}(\text{sen}((x)) = x,\ \ -\pi/2\ \le\ x\ \le \pi/2$

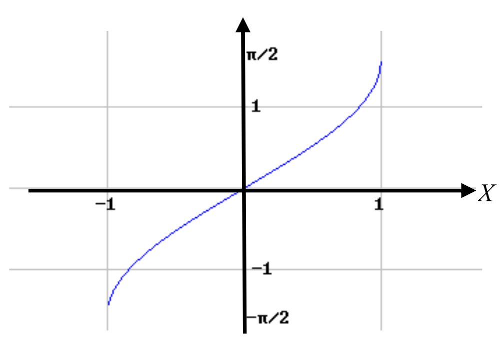


Figura 30

2.6.3. Inversa de la función la tangente:

La función tangente es inyectiva en el intervalo $]-\pi/2\ ,\ \pi/2[$, su rango es **R** y la función $y = \tan(x)$ es creciente (figura 31); por lo que la función tangente admite función inversa en este intervalo:

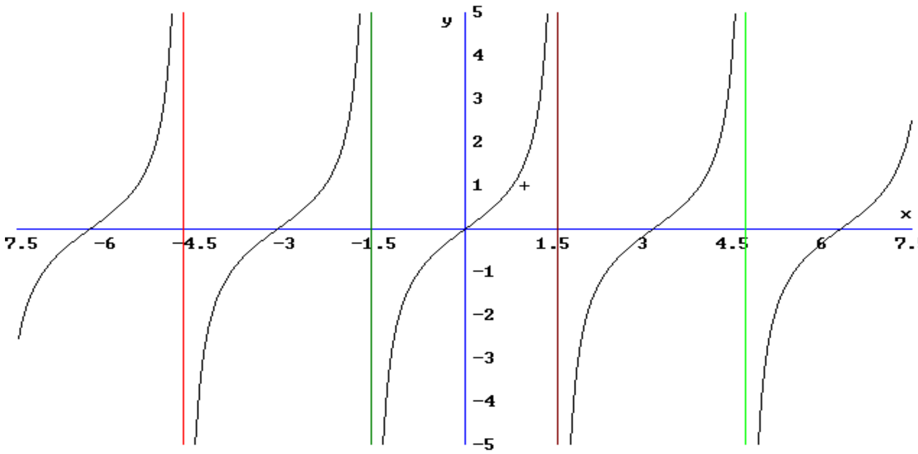


Figura 31: La función $y = \tan(x)$ es uno a uno en el $]-\pi/2\ ,\ \pi/2[$

DEFINICIÓN: La función inversa de la tangente, denotado por $\mathbf{tan}^{-1}$ o **arctan** y llamada arco tangente o tangente inversa, es definida por:

$$\arctan : \mathbf{R} \longrightarrow\ ]-\pi/2\ ,\ \pi/2[\ ,\ \text{donde } \arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x$$

De la definición anterior, para todo $x \in$ **R** existe un único $y \in\ ]-\pi/2\ ,\ \pi/2[$ tal que $\arctan(x) = y$, y para todo $y \in\ ]-\pi/2\ ,\ \pi/2[$, existe $x \in$ **R** tal que $\arctan(x) = y$.

Identidades del tangente y arco tangente:

$\tan(\arctan(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},\ \ -\infty \leq \boldsymbol{x} \leq +\infty$

$\arctan(\tan(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},\ \ \pi/2 < \boldsymbol{x} < \pi/2$

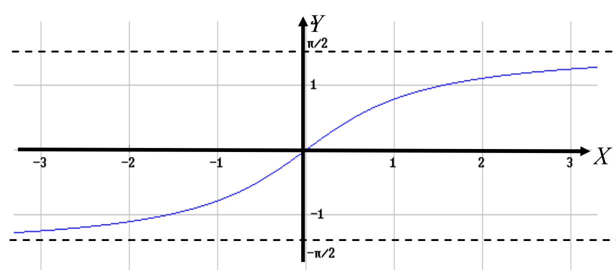


Figura 32

De la existencia de la función inversa de una función dada, de $y = f(x)$ se despeja $x = f^{-1}(y)$; lo que asegura que existe solución para x en la ecuación $y = f(x)$. Este argumento permite resolver ecuaciones con funciones trigonométricas $y = f(\theta)$, donde θ es número real **R** que usualmente indica la medida de un ángulo en radianes.

EJEMPLO: Resolver la ecuación $\operatorname{sen}(\theta).\ \tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$; es decir, hallar los números reales θ que satisfacen o hacen verdadera la igualdad dada.

Resolver la ecuación indicada significa hallar los números θ en **R**, que satisfagan la igualdad: $\operatorname{sen}(\theta).\ \tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$; en efecto:

De sen(θ). tan(θ) = sen(θ), transponiendo términos y factorizando, se tiene sucesivamente que sen(θ). tan(θ) − sen(θ) = 0 y sen(θ)[tan(θ) – 1] = 0. De esto, considerando el producto de dos números igual a 0, se tiene sen(θ) = 0 o tan(θ) = 1.

La ecuación sen(θ) = 0, se resuelve despejando θ = arcsen(0) = 0. Pero la función seno no es inyectiva y considerando E(θ) = (u , 0), o sea u = 1 o u = −1, se tiene E(θ) = (1 , 0) ó E(θ) = (−1 , 0), y teniendo que la función seno tiene periodo 2π, las soluciones para θ son: 0, π, 0+2kπ y π+2kπ, para todo k en **Z**, esto es: θ = kπ, para k en **Z**.

Análogamente, de la ecuación tan(θ) = 1 se tiene θ = arctan(1) = π/4, y como E(θ) = (u , u), o sea $u = \sqrt{2}/2$: o $u = -\sqrt{2}/2$, y considerando la periodicidad, se tiene: θ = π/4 + 2kπ ó θ = 5π/4 + 2kπ, para todo $k \in$ **Z**, es decir, θ = π/4 + kπ, con k en **Z**.

2.7. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Una **identidad trigonométrica** es una expresión dada por una igualdad que relaciona valores de funciones trigonométricas válidas para todos los números reales θ donde las expresiones de la igualdad están definidas en **R**.

De la definición de las funciones trigonométricas, para E(θ) = (u , v) en $\mathcal{C}_1(O)$, con $u^2 + v^2 = 1$, se tienen, entre otras, propiedades básicas o identidades básicas:

i) De sen(θ) = v y cos(θ) = u; resulta la identidad $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, para todo θ en **R**.
ii) De sec(θ) = 1/cos(θ), se tiene la identidad sec(θ).cos(θ) = 1, para todo θ ≠ π/2 + πk, $k \in$ **Z**.

También, de identidades dadas se obtienen otras, tales como:

iii) De $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, dividiendo entre cos(θ), para θ ≠ π/2 + πk, $k \in$ **Z**, se tiene la identidad: $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$; o dividiendo entre sen(θ), para θ ≠ kπ con k en **Z**, se tiene la identidad: $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$.

Aparte de estas identidades o propiedades básicas, que resultan de la definición de las funciones trigonométricas, existen otras identidades o propiedades que tienen utilidad en las aplicaciones de reducción o simplificación de expresiones con funciones trigonométricas, como veremos:

2.7.1. Identidades aditivas:

Son propiedades que relacionan los valores de las funciones trigonométricas para α y β en **R** con los valores para α + β, α − β, 2α o α/2.

TEOREMA (fundamental): Para α y β en **R**, se cumple:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).$$

Demostración: Es suficiente tener α y β en $[0\,,2\pi[$, con $\alpha > \beta$. Sean $E(0) = (1\,,0)$, $E(\alpha) = (a\,,b)$, $E(\beta) = (c\,,d)$ y $E(\alpha-\beta) = (p\,,q)$. Por definición de las funciones coseno y seno, resultan: $a = \cos(\alpha)$, $c = \cos(\beta)$, $p = \cos(\alpha-\beta)$, $1 = \cos(0)$, $b = \text{sen}(\alpha)$, $d = \text{sen}(\beta)$, $q = \text{sen}(\alpha-\beta)$ y $0 = \text{sen}(0)$.

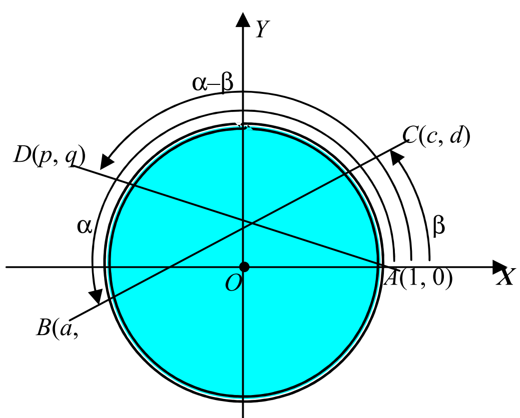
Como $\alpha-(\alpha-\beta) = \beta$, se tiene los arcos $\overset{\frown}{E(0)E(\alpha-\beta)}$ y $\overset{\frown}{E(\beta)E(\alpha)}$ tienen longitudes iguales.

Por lo tanto, $d(E(0)\,,E(\alpha-\beta)) = d(E(\beta)\,,E(\alpha))$, o sea

$\sqrt{(p-1)^2+(q-0)^2} = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$. De donde $(a-c)^2+(b-d)^2 = (p-1)^2+(q-0)^2$

ó $a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd = p^2-2p+1+q^2$. Como $a^2+b^2 = 1$, $p^2+q^2 = 1$ y $c^2+d^2 = 1$, se tiene: $2-2ac-2bd = 2-2p$; esto es: $p = ac+bd$, en donde, reemplazando $p = \cos(\alpha-\beta)$, $a = \cos(\alpha)$, $b = \text{sen}(\alpha)$, $c = \cos(\beta)$ y $d = \text{sen}(\beta)$, resulta:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta).$$



En la figura:

$.m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{BD}) = \beta$

$.m(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$

$.m(\overset{\frown}{BD}) = \alpha-\beta$

$x^2+y^2 = 1$

Figura 33

Del teorema anterior, se obtienen identidades que conducen al coseno, al seno y a la tangente de $\alpha+\beta$ y al seno y a la tangente de $\alpha-\beta$, a través del siguiente:

COROLARIO: Dados α y β en **R**, donde las funciones dadas estén definidas, se cumplen:

i) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$;

ii) $\text{Sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) - \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$ y $\text{Sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$;

iii) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)}$ y $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha).\tan(\beta)}$.

Demostración:

i) Como $\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$, la función coseno es función par y la función seno es impar, se tiene por el teorema:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos(\alpha).\cos(-\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(-\beta)\\ &= \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).(-\text{sen}(\beta)) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\end{aligned}$$

ii) Por la propiedad de las cofunciones, el coseno es par, el seno es impar y el teorema:

Sen(α − β) = cos (π/2 − (α − β)) = cos((π/2 −α) – (−β))

= cos(π/2 − α).cos(−β) + sen(π/2 − α).sen(−β) = sen(α).cos(β) – cos(α).sen(β); y

Sen(α+β) = sen(α– (−β)) = sen(α).cos(−β) – cos(α).sen(−β) = sen(α).cos(β) + cos(α).sen(β).

iii) Con procedimientos análogos y por definición, se obtienen las identidades para la tangente.

2.7.2. Identidades de arco o ángulo doble:

Las identidades aditivas (de arcos o ángulos) inducen a otras identidades, como casos particulares: 2α = α + α, se llama **ángulo doble**.

Así, para α en **R** donde las funciones consideradas están definidas:

i) sen(2α) = sen(α+α) = sen(α).cos(α) + cos(α).sen(α) = 2.sen(α).cos(α); es decir, se tiene la identidad: sen(2α) = 2sen(α).cos(α).

ii) $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha).\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha).\operatorname{sen}(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$

$= (1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)$ o

$= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) = 2\cos^2(\alpha) - 1$; es decir, se tiene las identidades:

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$, $\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

iii) $\tan(2\alpha) = \tan(\alpha + \alpha). = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha).\tan(\alpha)} = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$, y se tiene la identidad:

$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$, para α tal que $\tan(\alpha) \neq \pm 1$.

2.7.3. Identidades de arco o ángulo mitad

Las funciones trigonométricas de **ángulo mitad** resulta de 2α = β, o sea α = β/2, para β donde las funciones consideradas están definidas. Se tienen:

i) De $\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha)$, se tiene: $\cos(\beta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\beta/2)$. Despejando $\operatorname{sen}^2(\beta/2)$, resulta:

$\operatorname{sen}^2(\beta/2) = \dfrac{1 - \cos(\beta)}{2}$; de donde $\operatorname{sen}(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\beta)}{2}}$, en donde signo se toma, según el cuadrante al que pertenece E(β/2). Luego, resulta la identidad: $\operatorname{sen}(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\beta)}{2}}$.

ii) De $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, se tiene: $\cos(\beta) = 2\cos^2(\beta/2) - 1$; de donde $\cos^2(\beta/2) = \dfrac{1 + \cos(\beta)}{2}$,

o sea: $\cos(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(\beta)}{2}}$, en donde signo se toma, según el cuadrante al que pertenece E(β/2). Luego, resulta la identidad: $\cos(\beta/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(\beta)}{2}}$.

iii) Análogamente se tiene la identidad: $\tan(\dfrac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}} = \dfrac{sen(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \dfrac{1 - \cos(\theta)}{sen(\theta)}$.

2.8. MÓDULO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA PERSONALIZADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Proponer modelos didácticos para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática que responda a la realidad educativa actual y que facilite el logro de aprendizajes significativos de contenidos matemáticos en los alumnos que egresan del nivel de educación secundaria es fundamental. Desde esta perspectiva consideramos como un aporte importante la estrategia de la enseñanza personalizada mediante módulos didácticos de las funciones trigonométricas, cuyo teoría se detalla a continuación:

2.8.1. Módulo Didáctico

Un "Módulo Didáctico" es una estructura articulada de unidades y actividades de aprendizaje que, en un lapso flexible de tiempo, permite alcanzar objetivos educacionales de desarrollo de capacidades, destrezas y actitudes que posibiliten al alumno el cumplimiento de las metas y fines propuestos con antelación... Cada unidad modular es autosuficiente para el logro de capacidades en el educando. A través de él se abordan problemas educativos relacionando el análisis teórico y la intervención práctica, mediante producciones teóricas de carácter pedagógico, psicológico, curricular y; mediante el desarrollo de unidades modulares, experiencias prácticas de grupos innovadores, actuaciones concretas del profesor en clase, tendientes a transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un ambiente de (autonomía, respeto a la diversidad, igualdad, solidaridad, cooperación...), en la asimilación de tópicos de la matemática por parte del alumno; donde el maestro es el promotor no directivo, sinérgico y productor de energía convivencial, atractivo, comprensivo y creador, perceptible del aprendizaje, desde tres puntos de vista. (Catalana, 2005)

-) **Desde el punto de vista del diseño curricular**, un módulo didáctico es una unidad que permite estructurar los objetivos, los contenidos y las actividades con un propósito definido orientados a capacidades que se pretende desarrollar en el estudiante.

-) **Desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje**, el módulo didáctico constituye una integración de capacidades, actividades y contenidos relativos a un "saber" que se aprende a partir de una situación problemática derivada de la práctica educativa. Así, el módulo didáctico es un material y/o medio de enseñanza que integra conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes.

-) **Desde el punto de vista de su uso**, están orientados a la profundización del conocimiento de un tópico o tema determinado, para aquellos estudiantes que, habiendo cumplido con los objetivos básicos, desea avanzar o enriquecer su aprendizaje. Asimismo, permite recuperar y reforzar aprendizajes, en caso de que no se hayan alcanzado los niveles de logro requeridos en el aula.

Módulo Didáctico como Medio y/o Material de aprendizaje

El Módulo didáctico es un material y/o medio de estudio planeada y estructurada para facilitar el logro de objetivos formulados en un proceso de enseñanza-aprendizaje, mediante la actividad del alumno con orientación del profesor, en el trabajo individual y/o grupal. El tiempo para aprender el contenido del módulo didáctico está en función de las capacidades previas del alumno y su dedicación, con miras a lograr objetivos educacionales propuestos.

Su elaboración se fundamenta en importantes criterios psicológicos, pedagógicos y didácticos, como son: el principio de libertad, actividad, responsabilidad, autocontrol, el respeto a las diferencias individuales y el refuerzo positivo como clave para incrementar la actividad del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para Gagné (1976) el módulo puede contener todos los materiales didácticos necesarios para pasar una prueba sobre el objetivo, contiene pruebas de "*práctica*", con las cuales el estudiante puede autoevaluarse. También, el propio módulo didáctico y sus instrucciones permiten al estudiante realizar su tarea de aprendizaje, con orientación del profesor en los puntos donde exprese dificultad.

2.8.2. Enseñanza personalizada

Una enseñanza personalizada está adaptada a las peculiaridades de cada alumno, además de posibilitar, en su caso, la prosecución de estudios posteriores. Esta adaptación formal del sistema a las necesidades de aprendizaje del alumno, supone sobre todo la voluntad de establecer una relación pedagógica con él. Donde el aprendizaje del alumno es el objeto de atención primordial del profesor, donde la puerta del aula está siempre abierta para establecer una fructífera relación intelectual, que permite establecer el equilibrio necesario entre el objetivo de asegurar el acceso de los alumnos a unos aprendizajes fundamentales para su desarrollo y socialización, por una parte, y el respeto por los diferentes intereses, motivaciones y capacidades que presentan los alumnos en esta etapa educativa, por otra.

La enseñanza personalizada, entendida como una planificación y ejercicio de intervenciones educativas se ajusta a las características individuales de los alumnos, considera a la persona (alumno) como principio de toda actividad educativa, resaltándose para ello, los principios de:

Singularidad: Hace posible de que los trabajos y las relaciones escolares permiten el desarrollo de cada estudiante de acuerdo con su capacidad, su interés y su ritmo de aprendizaje; teniendo en cuenta además las circunstancias familiares y sociales que lo rodean.

Autonomía: Hace posible la participación de los alumnos no sólo en la realización, sino también en la organización y programación de actividades, de tal forma que los escolares puedan ejercer su libertad de aceptación, de elección y de iniciativa.

Apertura: Hace posible que en el trabajo escolar desarrolle también su capacidad de comunicación y de expresión.

2.8.3. Elaboración del Módulo didáctico para la enseñanza personalizada

La enseñanza personalizada de la matemática mediante módulos didácticos, a diferencia de la enseñanza tradicional, propone un recorrido, un guión, un argumento de desarrollo articulado y sistémico de los contenidos de la matemática. No se trata de una yuxtaposición o una acumulación de contenidos provenientes de diferentes fuentes sino de una estructuración en torno a una situación que, vinculada a un problema, posibilita la selección de los contenidos necesarios para desarrollar las capacidades que permitan el logro de aprendizajes significativos.

Coincidiendo con lo expresado por Suárez, C. & Arizaga, R. (1999), entre las utilidades y características que tienen los módulos didácticos, como medio y material educativo para el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de la matemática en particular:

- Ponen énfasis en la actividad individual de los alumnos, facilitando el logro de aprendizajes específicos, significativos y concretos.
- Utilizan un lenguaje claro y sencillo, promoviendo hábitos de estudio individual y grupal.
- Están dotados de un conjunto de estrategias metodológicas para estimular el autoaprendizaje.
- Invitan a la reconstrucción y construcción activa del conocimiento de tópicos de la Matemática. Las actividades propuestas deben favorecer al análisis y síntesis y no sólo limitarse a la repetición de conceptos.
- Desarrollan contenidos: graduados y flexibles de acuerdo al ritmo del alumno.
- Tienen claro las características intelectuales del alumno a quien va dirigido.
- Las actividades de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje continua es un soporte fundamental de la enseñanza modular

personalizada. Los problemas se entregan al profesor y éste los corrige y los devuelve, y si es el caso los comenta, ya que comprometen más al alumno y ofrece claras oportunidades al profesor para estrechar la relación pedagógica.

A diferencia de la enseñanza tradicional, la Enseñanza Modular Personalizada de las funciones trigonométricas, permite:

- Concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje coherente con el desarrollo de capacidades de intuición y razonamiento lógico-matemático, donde el aprendizaje es un proceso de adquisición de significados que tiende a la permanente vinculación entre los contenidos y su aplicabilidad en la realidad.

- Desarrollar actividades formativas que integran formación teórica, conocimientos y saberes de distintos tópicos de la trigonometría, y su aplicabilidad práctica en función de las capacidades de los estudiantes.

- Contextualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante la incorporación de las particularidades de los actores involucrados, de las condiciones de infraestructura y de los recursos existentes.

- Que el alumno conozca con antelación los objetivos a lograrse, el cual incrementa su motivación por el aprendizaje.

- Los contenidos (conceptos; procedimientos, datos; valores; actitudes) son seleccionados en función de lo que se desea que aprenda el alumno en el proceso de construcción de sus conocimientos.

- La participación activa de los alumnos en todas las actividades de aprendizaje tanto en el aula o fuera de ella.

- Atender las diferencias personales en el ritmo de aprendizaje y las actitudes, es decir se adapta al ritmo de aprendizaje.

- La presentación de los contenidos en una secuencia lógica y sistémica, los mismos que sirven para la consecución de la evaluación de proceso.

- Realizar las actividades de autoevaluación y coevaluación para la corrección inmediata de los errores cometidos.

- Durante el desarrollo del módulo didáctico, particularmente durante el proceso de solución de problemas, el alumno va adquiriendo un aprendizaje sistemático de los temas.

- Reforzamiento o realimentación inmediata y constante de los temas no asimilados.

- Disponer de mayor tiempo al profesor para la atención de los problemas académicos y/o personales de los alumnos.

- Una evaluación preferentemente de carácter formativo, sin descuidar las evaluaciones de entrada y la evaluación sumativa o final.

2.8.4. Estructura del contenido del Módulo Didáctico

El Módulo Didáctico elaborado por el docente como material didáctico para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas está orientado a desarrollar equilibradamente las aptitudes matemáticas de análisis, síntesis, lógica, abstracción, agilidad mental en el cálculo, intuición e imaginación. Asimismo, otras facultades propias del aprendizaje como reflexión, expresión simbólica, espíritu crítico, retentiva, comprensión lectora, creatividad, etc. También fomenta la capacidad de iniciativa y adquirir autonomía en la resolución de problemas y la asimilación de contenidos.

Para plasmar lo expresado, la estructura del módulo didáctico, esta formado por:

CARÁTULA: en los módulos por lo general se mencionan datos generales como: institución, tema, nombre del participante, número de unidad, fecha, nombre del docente, ciudad, entre otros datos según el caso. El módulo didáctico elaborado consigan en primer término el título: Funciones trigonométricas, luego el grado de estudios al que va dirigido: Quinto Grado, y el nombre del docente elaborador y ejecutor del proceso de enseñanza-aprendizaje.

DESCRIPCIÓN SUMARIA DEL MÓDULO DIDÁCTICO: donde se menciona el contenido global del material de estudio elaborado, como la prueba de requisitos, las actividades previas para el estudio de las funciones trigonométricas y el contenido del módulo didáctico, distribuidos en cinco unidades modulares.

INSTRUCCIONES: se dan las pautas y procedimientos a seguir durante el desarrollo del módulo didáctico, donde se dan las recomendaciones y la motivación pertinente para la consecución de los objetivos formulados al finalizar el estudio del material.

ESQUEMA DE CONTENIDO: en esta sección se muestra un diagrama esquemático jerarquizado de todo el contenido del módulo didáctico, la misma que se inicia con el estudio de arcos orientados y función envolvente, luego ángulos y arcos orientados, llegando en forma secuencial hasta el estudio de las funciones trigonométricas inversas y las identidades trigonométricas.

METODOLOGÍA: se expresa casi siempre a través de un flujograma, en la misma se indica la secuencia lógica que se debe seguir en el estudio de cada unidad modular, cuyo cumplimiento estricto de lo indicado en los bucles conducirán a la obtención de aprendizaje significativo de los temas referidos a las funciones trigonométricas por parte del lector del módulo didáctico.

REQUISITOS: se indican un listado de temas jerarquizados y secuenciales referidos a funciones reales y conceptos de geometría que el alumno debe conocer previamente para incursionar en el estudio de las funciones trigonométricas. Asimismo, se hace un listado de algunas destrezas y actitudes que debe tener el alumno durante el estudio del Módulo Didáctico.
Los dos requisitos consignados: cognitivos y actitudinales, permitirá que el alumno logre un aprendizaje eficaz y eficiente de las funciones trigonométricas.

PRUEBA DE REQUISITOS: valoración cuantitativa y cualitativa respecto al conocimiento previo que se tiene de los tópicos que serán fundamentales para abordar el nuevo tema. Es un cuestionario que se administra con los ítems que corresponden a los requisitos cognitivos descritos, la misma sirvió para ratificar la elección del grupo experimental y de control, con cuyos resultados se da un refuerzo en los tópicos consignados en los ítems a los alumnos del grupo experimental.

ACTIVIDAD PREVIA: Se realizan dos actividades referidos a una situación real. La primera actividad previa, consiste en la medición de la altura de la pared del colegio mediante semejanza de triángulos rectángulo, que son interpretados a través de un sistema de coordenadas rectangulares que nos sirve como referente en el estudio de las funciones trigonométricas en todo el módulo didáctico. La segunda actividad previa consiste en la visualización de un fenómeno periódico y está orientado a introducir a los alumnos la idea de funciones periódicas para que el estudiante se familiarice con la periodicidad que muestran las funciones trigonométricas.

MÓDULO DIDÁCTICO: Antes de iniciar el desarrollo del Módulo Didáctico, se consigna el objetivo general (meta) que se busca a través de la estrategia de enseñanza modular personalizada propuesta y experimentada; la misma, que será posible plasmarlo cumpliendo cinco objetivos específicos (objetivos generales para cada unidad modular), luego se consignan los cinco títulos de las unidades modulares a desarrollar para cumplir con cada objetivo específico. Previo al estudio de la primera unidad se hace una breve reseña histórica de la Trigonometría.

UNIDADES MODULARES: El contenido del Módulo Didáctico para el estudio de las Funciones Trigonométricas se presentan en cinco unidades modulares y cada unidad modular consta de las siguientes partes:

-) Objetivo General:: se indica el logro del aprendizaje global que se pretende lograr en cada unidad modular.

-) **Prueba de Entrada**: Se administra para saber los conocimientos que puede tener el alumno sobre el tema que se va estudiar.

-) **Requisitos:** consiste en un listado de temas que debió conocer el alumno para no tener dificultades en el estudio de la unidad modular.

-) **Objetivos:** se menciona los logros deseables durante el desarrollo de las sub-unidades modulares.

-) **Contenidos:** está constituido por los temas que se desarrollan en forma secuencial y sistemática en el material, la misma que se expone concatenando lo intuitivo y lo formal, contiene conceptos detallados, ejemplos explícitos, ejercicios para completar, etc. , para que la lectura del material sea entretenido y motivado.

-) **Actividades previas:** son actividades que los alumnos realizan con objetos concretos para incursionar con facilidad a la temática, facilitando su aprendizaje formalizado.

-) **Contenido:** está constituido por los temas desarrollados en forma secuencial y sistemática en el material, es lo que el alumno debe estudiar mediante la enseñanza personalizada, para luego ser evaluado.

-) **Unidades de aprendizaje:** es el desarrollo de los subtemas o tópicos dosificados sistemáticamente, orientados al logro de los objetivos específicos donde los alumnos trabajan en forma individual y grupal, luego identifican sus aprendizajes a través de las pruebas de comprobación de aprendizaje con sus compañeros y también con el profesor..

-) **Prueba de comprobación del aprendizaje:** se administra un cuestionario referidos a los temas desarrollados en la unidad modular, luego se autoevalúan los aprendizajes logrados, comparando sus respuestas con los otros alumnos y luego con el profesor.

-) **Ponderación de los calificativos**: los alumnos se autoevalúan y se asignan una nota, ya sea para pasar al estudio de la siguiente unidad modular en caso de que obtuvo calificativo de 18 a 20, o para volver a estudiar algunos punto débiles.

-) **Resumen**: Se hace un recuento de los objetivos que el alumno debió cumplir al finalizar el estudio de cada unidad modular, para tomar conciencia de su aprendizaje logrado.

-) **Actividades de realimentación:** Se formulan interrogantes sobre el aprendizaje logrado, para ver si sus calificativos logrados es lo necesario para pasar a la siguiente unidad modular o requieren reforzar algunos puntos débiles. Esta actividad también puede ser dada por el profesor ya sea en forma individual o grupal.

Esta estructura integral del contenido modular, está desarrollado bajo la filosofía de que el alumno no debe nutrirse sólo con los conocimientos del profesor vertidos en clase, sino también de su autoestudio, de la cooperación y del aporte de sus compañeros; que tiene su cause en actividades de ayuda mutua y colaboración desinteresada de los más avanzados en el proceso de enseñanza-aprendizaje conducente al logro de los objetivos formulados para el aprendizaje de conceptos y propiedades de las funciones trigonométricas desarrollados durante un bimestre, conexo al desarrollo del contenido temático, se propició el desarrollo de los valores de laboriosidad, perseverancia, confianza en si mismo, aceptación de limitaciones personales, solidaridad y amor al trabajo bien hecho.

2.8.5. Ejemplo de Esquema de Sesión de Aprendizaje en la enseñanza modular personalizada

I.- Datos Generales

1. Centro Educativo : Colegio Nacional de Aplicación Hermilio Valdizán
2. Asignatura : Matemática
3. Grado y Sección : 5º D
4. Profesor : Vilchez Guizado, Jesús

II.- Información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje

2.1 Tema: Arcos orientados y función envolvente en la circunferencia unitaria.

2.2 Unidad didáctica: Primera

2.3 Objetivo de la unidad: Definir arcos orientados y arcos coterminales sobre la circunferencia unitaria, e identificar la función envolvente.

2.4 Objetivos específicos:

1. Identificar arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano $\mathbf{R}^2$.
2. Distinguir los arcos orientados y arcos coterminales sobre la $\mathcal{C}_1(O)$.
3. Definir la función envolvente y determinar las coordenadas del extremo sobre la $\mathcal{C}_1(O)$.
4. Determinar las coordenadas de los extremos de los arcos notables en la $\mathcal{C}_1(O)$.
5. Definir función periódica e identificar fenómenos periódicos y resolver ejercicios de aplicación.

2.5 Fecha y tiempo: Del 11-04-05 al 15-04-05; 06 horas pedagógicas.

2.6 Metodología didáctica:

2.6.1 Métodos: Heurístico, deductivo - inductivo,.

2.6.2 Procedimientos: Observación, comparación, abstracción y generalización.

2.6.3 Técnicas: Trabajo individual, trabajo en equipo, práctica grupal.

2.7 Medios y Materiales: Módulo Didáctico; hilo, círculo de triplay, compás, papelote, plumones y Cuaderno de Ejercicios.

III.- Contenidos

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	**MATERIALES**	**TIEMPO**
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 05 ítems referidos al tema de medidas angulares que se desarrolla en la clase.	Módulo Didáctico, lapiceros, compás, papel graduada, hilo.	30’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno Alumno Profesor	1. Se realiza un trabajo taller grupal relacionar las medidas de la circunferencia y el diámetro de objetos circulares. 2. Se deduce el valor aproximado del número irracional π.	Módulo Didáctico Latas u otros objetos circulares. Centímetros.	30’

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTO	ACTITUDES
FUNCIÓN ENVOLVENTE 1. La ecuación cartesiana de la circunferencia unitaria. 2. Arcos coterminales y función envolvente en la circunferencia unitaria. 3. Coordenadas del punto terminal en una función envolvente. 4. Coordenadas de los extremos de los arcos notables en la $\mathcal{C}_1(O)$. 5. Fenómenos periódicos y función periódica.	Deducen y aplican la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas. Identifican y definen arcos circulares, el dominio y rango de una función envolvente y arcos coterminales. Identifican las coordenadas de los extremos de los arcos notables sobre la circunferencia unitaria: $\theta = \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi/6$, etc. Determinan diversos fenómenos periódicos y los grafican. Resuelven ejercicios y problemas sobre arcos en la circunferencia.	Manifiesta interés y atención en la hora de clase. Trabaja con honestidad y alegría. Persevera en la resolución de problemas con empeño y esfuerzo.

IV. Plan de ejecución del proceso enseñanza- aprendizaje

SITUACIÓN	ESTRATEGIA	**MATERIALES**	**TIEMPO**
PRUEBA DE ENTRADA Prof. →Alumno	Se administra una prueba de 05 ítems referidos al tema de medidas angulares que se desarrolla en la clase.	Módulo Didáctico, lapiceros, compás, papel graduada, hilo.	30’
MOTIVACIÓN Prof. →Alumno Alumno Profesor	1. Se realiza un trabajo taller grupal relacionar las medidas de la circunferencia y el diámetro de objetos circulares. 2. Se deduce el valor aproximado del número irracional π.	Módulo Didáctico Latas u otros objetos circulares. Centímetros.	30’
INICIO Profesor	Recuperación de conocimientos previos mediante una breve lluvia de conceptos vertidos en el desarrollo de prerrequisitos. Se identifica la ecuación de la circunferencia unitaria en posición normal.	Módulo Didáctico Papelote Cuaderno de Ejercicios. hilo	30\`
PROCESO Prof. →Alumno (Módulo Didáctico)	1. A partir del hilo de longitud L y el círculo de triplay, se define la $\mathcal{C}_1(O)$ en $\mathbf{R}^2$. 2. Se definen los arcos coterminales sobre la circunferencia unitaria. 3. Se define y se identifican los arcos determinados sobre $\mathcal{C}_1(O)$ por la función envolvente. 4. Se esclarecen las trayectorias periódicas que se determinan en la $\mathcal{C}_1(O)$.	Módulo Didáctico Plumón Papelotes Transportador. Hilo. Circulo de triplay	90’
SALIDA	Los alumnos resuelven los ejercicios planteados con la asesoría del profesor, este aclarará las dudas que existan en los alumnos. Los alumnos resuelven los ejercicios de comprobación del aprendizaje. Discuten y comparan sus resultados obtenidos.	Módulo Didáctico Plumón , Reglas Guía de observación. Compás.. Hoja de ejercicios	60\`
FIJACIÓN	El docente propicia la autoevaluación y coevaluación. Y da un resumen del tema desarrollado.	Módulo Didáctico Cuestionario Papelote.	30’

V.- Evaluación

CRITERIOS	INDICADORES	INSTRUMENTOS
Razonamiento, deducción, abstracción y demostración. Manejo de conceptos y algoritmos. Interpretación y representación gráfica. Resolución de problemas	Identifica y genera ejemplos. Esquemas y/o pasos para realizar ejercicios. Explica, define, representa y distingue los conceptos y relaciones. Formula, resuelve, elabora, traduce ejemplos a partir del contexto conceptual	Módulo Didáctico Exposición. Prácticas dirigidas Tareas domiciliarias

Bibliografía: -) SANTILLANA, (1999) Símbolo. Matemática secundaria 3 y 5.

-) NICHOLS, Eugene (1970) Trigonometría moderna)

2.8.6. Modelo de Sesión de Clase para la enseñanza modular personalizada

En las siguientes líneas se exhibe un ejemplo de clase a través del módulo didáctico llevado a cabo en el Grupo Experimental, que se desarrolla haciendo uso de la heurística:

PLAN DE CLASE

GRADO: Quinto de Secundaria
CONTENIDO: Trigonometría
TEMA: Ángulos y arcos orientados.
OBJETIVO: Determinar las medidas de ángulos y arcos: sus equivalencias en distintos sistemas.

PROBLEMA: Identificar los ángulos y arcos orientados en la circunferencia unitaria y establece la relación entre ellas

PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN:
DOCENTE: Estimados alumnos, antes de desarrollar el tema de hoy, recordemos algunos conceptos.
¿Cuál es la unidad del SI para medir ángulos? ¿Qué son medidas angulares? ¿Qué diferencia existe entre arcos y ángulos orientados? ¿Qué es longitud de arco y longitud de circunferencia?.

ALUMNOS: Responden la pregunta algunos en forma correcta, otros parcialmente correctas y también en forma errónea:
DOCENTE: Aclara y precisa algunas preguntas vertidas por algunos alumnos, haciendo recordar los temas abordados en la clase anterior.

PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN:
DOCENTE: Aquí tienen un círculo con dos agujas (radios) que coinciden el centro su centro donde podemos identificar el tema de clase, también ustedes tienen a disposición en cada grupo un circulo similar hecho de cartulina. Entonces realicemos las siguientes actividades:

1. Tracemos un diámetro del círculo y su respectiva mediatriz, qudando definida sobre el círculo un sistema de ejes perpendiculares.

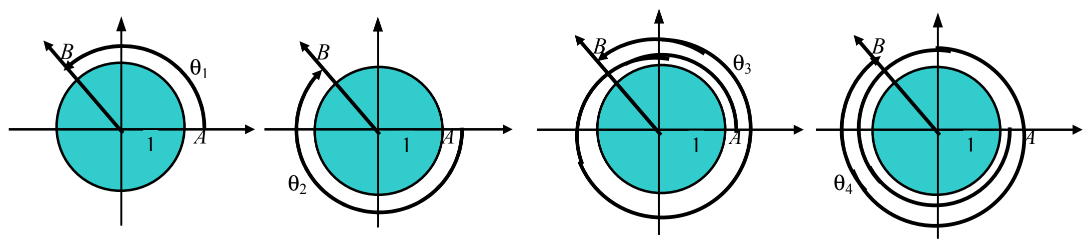
2. Ubicar fijo una de las agujas sobre el diámetro con extremo de coordenada (1 , 0) y hacer el desplazamiento de la otra aguja en sentido horario y antihorario.

3. Ubicar el punto extremo de la aguja móvil sobre el borde del círculo y trazar de ellos proyecciones paralelas a los dos ejes elegidos.

Estas tres experiencias visuales nos da la idea intuitiva de arco y ángulo orientado.

PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN:
DOCENTE: ¿Podrían identificar las coordenadas de los extremos de la aguja móvil cuando este coincide con las diagonales del de los cuadrantes y cuando coincide en el eje de coordenadas? ¿Cuál es la longitud de arco y la medida del ángulo para cada caso anterior? ¿Qué ocurre cuándo la longitud de arco es igual al del radio del círculo.
ALUMNOS: Profesor…
-) Las coordenadas de los ocho puntos generados serían:
-) Para cada caso las longitudes de arco dependen de la orientación que tiene la aguja que se gira.
-) Cada posición de la aguja móvil determina un ángulo central en el círculo.
-) Los ángulos son de 45°, 90°, …………………………………………….
-) Parece que cuando la longitud de arco en el círculo y el radio miden igual se llama radián

DOCENTE: En t**rigonometría**, consideremos ángulos orientados, a partir de arcos orientados en la $\mathcal{C}_1(O)$. Como se ve en las figuras para valores θ en **R**: hablaremos de ángulos orientados de lados inicial $\overrightarrow{OA}$, lados terminal $\overrightarrow{OB}$ y medida θ, como se ilustra en la figura:



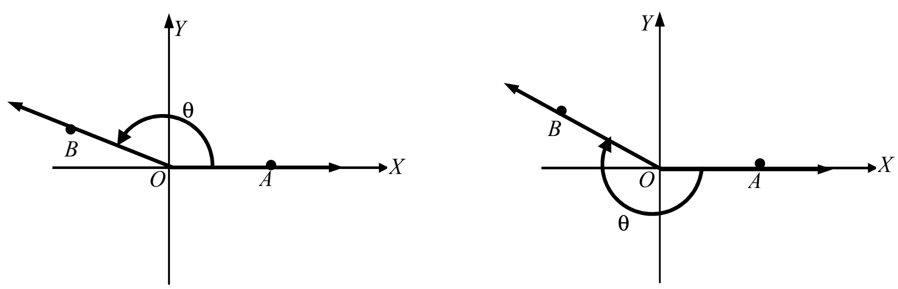
(A, θ_1) (A, θ_2) (A, θ_3) (A, θ_4)

PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN:

DOCENTE: Del trabajo experimental realizado ¿De que manera podemos formalizar el concepto de arcos y ángulos orientados?

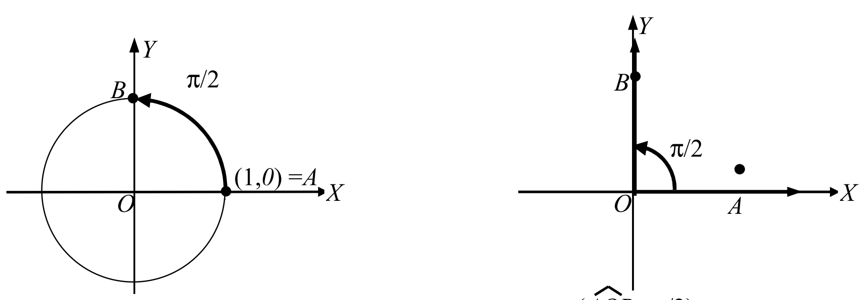
Entonces la definición formal de ángulo orientado es:

DEFINICIÓN: El ángulo *AOB* asociado a un arco orientado (A , θ), en posición normal, llamaremos <u>ángulo orientado en posición normal de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, lado terminal $\overrightarrow{OB}$ y medida θ</u> que se denota ($A\hat{O}B$, θ) y se representa en la figura:



Ejemplo:

Para el arco orientado (A, π/2) se tiene el (*AOB* , π/2), ángulo orientado de lado inicial $\overrightarrow{OA}$, y lado terminal $\overrightarrow{OB}$ y de medida π/2, como se muestra en la figura;



(A , π/2) ($A\widehat{O}B$, π/2)

PREGUNTAS DE APLICACIÓN:

DOCENTE: ¿Es posible que coincidan los lados terminales de dos ángulos o arcos orientados? ………………………………………..…………………………………

¿Cómo se denominan dos arcos o ángulos que tienen el mismo lado terminal?………..

PROBLEMA: En una hoja de papel, construya los arcos orientados en posición normal en la circunferencia unitaria, correspondientes a: (A , π/3), (A , −5π/4), (A, 3π/4), (A , −π/6), (A , 11π/6) y (A , −2π/3); y, construya los ángulos orientados en posición normal, correspondientes, luego diga cuáles son coterminales.

2.8.7. Conveniencias e inconveniencias de la enseñanza modular personalizada.

El proceso de enseñanza-aprendizajes de las funciones trigonométricas mediante módulos didácticos, como todo proceso de innovación didáctica durante su consecución trae muchas ventajas y también inconvenientes para su consecución:

Conveniencias:

-) El alumno desarrolla una actividad mental constructiva y motivación, el docente guía al alumno hacia la consecución de saberes constituidos, contenidos graduados con nivel de dificultad ascendente.

-) Permite a los alumnos el logro de los temas enseñados en forma homogénea y bajo la asesoría y supervisión del docente.

-) Facilita el aprendizaje individual y grupal de los temas estudiados, con participación activa en los procesos de atoevaluación y coevalución de los alumnos.

-) Promueve desarrollo de ciertos valores, como: laboriosidad, perseverancia en el estudio, confianza en si mismo, alegría, solidaridad, amor al estudio, deseo de superación, etc.

Inconveniencias:

-) Alumnos con escasa predisposición para el estudio individual y grupal del Módulo Didáctico elaborado para facilitar el aprendizaje de las funciones trigonométricas.

-) La escasa preparación de alumnos para el trabajo en equipo, la poca motivación y la heterogeneidad en sus formas de aprender.

-) Elevado costo de la reproducción de materia impreso para el estudio personalizado del módulo didáctico.

-) Resistencia al cambio y al desarrollo de actitudes conducentes a un aprendizaje eficiente de la trigonométrica.

3. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE TÉRMINOS

1. **Aprendizaje significativo:** "*Es el aprendizaje en el que el alumno, desde lo que sabe y gracias a la manera como el profesor le presenta la información, reorganiza su conocimiento del mundo, pues encuentra nuevas dimensiones, transfiere ese conocimiento a otras situaciones o realidades, descubre el principio y los procesos que lo explican, lo que le proporciona una mejora en su capacidad de organización comprensiva para otras experiencias, sucesos, ideas, valores y procesos de pensamiento que va a adquirir escolar o extraescolarmente*", (Cornejo, 1993)

2. **Educación Matemática:** La educación matemática se concibe "como una disciplina joven que maneja conceptos y teorías que ayudan a comprender y explicar las dificultades que se le presentan en el salón de clase. Descubre que tiene una visión acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, al ver que existen diversas posiciones sobre estos tópicos, e inicia un proceso de cuestionamiento de las propias", (Gómez, 1999).

3. **Enseñanza Modular:** Método de enseñanza entendido como un conjunto de técnicas y procedimientos que permiten al alumno ser el centro y el elemento más importante de su aprendizaje, sobre la base de su propio ritmo, interés y motivación, en donde el docente cumple el rol de facilitador del aprendizaje.

4. **Enseñanza Personalizada:** La enseñanza personalizada es una estrategia de dirección del proceso de aprendizaje del alumno con la finalidad de desarrollar su capacidad intelectual, se apoya en la consideración del alumno como persona y no sólo como organismo que reacciona ante estímulos, considerándolo como un ser escudriñador y activo que explora y fortalece su estructura cognitiva posibilitando atención constante a las dificultades del aprendizaje individual y en equipo.

5. **Educación Personalizada:** Es una actividad educativa centrada en la persona. Siendo el objetivo fundamental perfeccionar las facultades del estudiante, tanto intelectuales como morales, a través de actividades diversas que se realizan intencionalmente para lograr este fin, de tal forma que se potencian al máximo las aptitudes, se adquieran unos conocimientos amplios y sólidos y se desarrollen los valores a través de la practica de hábitos en los períodos sensitivos adecuados.

6. **Evaluación del aprendizaje:** "Es un proceso sistemático y riguroso de recogida de datos, incorporando al proceso educativo desde su comienzo, de manera que sea posible disponer de información continua significativa para conocer la situación, formar juicios de valor con respecto a ella y tomar las decisiones adecuadas para proseguir la actividad educativa mejorándola progresivamente" (Casanova, 1999, p. 60).

7. **Materiales didácticos:** Son "todos aquellos medios y recursos que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, dentro de un contexto educativo global y sistemático, y estimulan la función de los sentidos para acceder más fácilmente a la información, a l adquisición de habilidades y destrezas, y a la formación de actitudes y valores" (Ogalde, 2003, p.21).

8. **Medio didáctico:** Canales a través de los cuales se comunican los mensajes o se favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje, pueden ser: la palabra oral, escrita, medios audiovisuales, etc., aptas para desarrollar las facultades y actividades y que lleva de modo consciente y sistemático la consecución de un fin educativo.

9. **Método tradicional:** Estrategia de enseñanza básicamente de carácter expositivo, donde el docente cumple la labor central de enseñanza, en tanto que los alumnos, juegan un rol pasivo de receptores de las clases, obligados a tomar apuntes, para luego rendir y aprobar un examen.

10. **Método Activo:** Estrategia metodológica sustentada en los principios: el alumno sólo aprende bien cuando lo hace por observación, reflexión y experimentación (auto-formación); la enseñanza debe ser adaptado a la naturaleza propia de cada alumno (enseñanza-diferenciado); orientado no sólo en su formación intelectual, también a sus aptitudes manuales, así como a su energía creadora (educación integral); etc.

11. **Método Didáctico:** Es un conjunto ordenado de técnicas utilizadas en el proceso de interacción docente-alumno y que tiene por objetivo el desarrollo de la personalidad la adquisición de conocimientos, con el fin de hacerlo cada vez más eficiente, en función del logro de los objetivos previamente fijados.

12. **Modelo:** Todo aquello que una persona se fija para imitarlo o reproducirlo, un modelo didáctico se ofrece al escolar para que lo reproduzca, copie o imite; el maestro, como modelo de autoridad promueve un cambio de actitudes y creencias de los alumnos hacia comportamientos similares.

13. **Módulo Didáctico:** Son materiales educativo diseñados en unidades de estudio y elaborados por el docente con la finalidad de mejorar el aprendizaje, a través de la interacción sistemática y sinérgica entre alumno-alumno y alumno-profesor. Tiene como objetivo transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un ambiente de (autonomía, respeto a la diversidad, igualdad, solidaridad, cooperación...), en la construcción del conocimiento por el alumno; donde el maestro es el promotor sinérgico del aprendizaje.

14. **Rendimiento Académico:** Es el resultado final del proceso de enseñanza-aprendizaje en función de los objetivos propuestos o previstos en un período de tiempo. El resultado expresa una calificación cuantitativa o cualitativa en el sistema vigesimal; por ejemplo los menores que once son considerados desaprobados.

15. **Recurso educativo:** Es cualquier material que, en un contexto educativo determinado, sea utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de las actividades formativas. Los recursos educativos que se pueden utilizar en una situación de enseñanza y aprendizaje pueden ser o no medios didácticos.

16. **Satisfacción estudiantil:** Es el estado en la que se encuentra el estudiante con respecto al aprendizaje logrado y servicios recibidos de la institución educativa durante su permanencia en ella, la misma, sirve como base para la tomar decisiones pertinentes para mejorarlo.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

1. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

1.1. Tipo de investigación

Siguiendo los tipos y métodos de Investigación Educativa propuesta por Schroeder (1999) la investigación realizada:

- **Por su finalidad:** es una investigación ***aplicada***, porque está orientado a resolver un problema práctico del fenómeno educativo.

- **Por su alcance temporal:** es una investigación ***sincrónica***, pues es resultado de un estudio en un período de tiempo corto o en un momento específico.

- **Por su profundidad:** es una investigación ***descriptiva y explicativa***, su objetivo es medir la variable dependiente en una muestra de una población; asimismo analiza los resultados obtenidos en el proceso de experimentación.

- **Por su amplitud:** es de carácter ***microeducacional***, puesto que la investigación se circunscribe a una asignatura en un Grado de estudio perteneciente a una institución educativa.

- **Por su carácter:** lo predominante es lo ***cuantitativo***, en la descripción, análisis de datos empíricos recolectados en el trabajo de campo.

- **Por su marco:** tiene los aspectos de *empírica*, *experimental* y *encuestas*.

- **Por el tipo de estudio:** Es una investigación ***piloto** y **evaluativa***, pues pretende probar la eficacia de una estrategia didáctica y luego apreciar e enjuiciar el logro de los objetivos en la aplicación del modelo de enseñanza.

- **Por el objeto al que se refiere:** es una investigación ***disciplinar***, ya que está referido al proceso de enseñanza-aprendizaje de un tema correspondiente a una asignatura.

1.2. Diseño de investigación

El diseño usado es el ***cuasiexperimental***, en la línea de Cronbach (1987), "*en que busca establecer relaciones de causalidad entre la variable independiente y dependiente, y que para ello se examinan los datos recogidos bajo distintas condiciones experimentales sin asignación aleatoria de los sujetos a dichas condiciones experimentales. Es decir, se da la manipulación de la variable independiente y se da también algún control de la situación experimental y de las variables secundarias, pero no hay aleatorización en la asignación de los sujetos a los grupos experimental o de control*", García Hoz (1994:291). Con fines de aplicación de métodos estadísticos inferenciales en el proceso de prueba de hipótesis, se tiene en cuenta que las secciones tienen casi las mismas notas (subgrupos de rendimiento homogéneo), se elige por sorteo simple el grupo experimental y el grupo de control, formando así un *diseño aleatorizado en bloques completos*.

El diseño cuasiexperimental con pre-prueba y post-prueba elegidos aleatoriamente para la comprobación de la hipótesis causal concuerda con la propuesta por Campbell y Stanley (1966), reproducidos por (Hernández, 1997:177). En términos de García Hoz (1994), es denominado diseño ***entregrupos*** y tiene el siguiente esquema:

Grupo experimental:	$\boldsymbol{Y}_1$	**X**	Y_2

Grupo de control:	$\boldsymbol{Y}_3$	Z	Y_4

Donde:

X: Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas.

Z: Enseñanza tradicional de las funciones trigonométricas.

$\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_3$: Prueba de requisitos del grupo Experimental y de Control, respectivamente.

$\boldsymbol{Y}_2$, $\boldsymbol{Y}_4$: Prueba de salida del grupo Experimental y de Control, respectivamente.

-------------: El grupo Experimental y el grupo de Control son independientes.

Pasos seguidos en el proceso de investigación:

1. La investigación se realiza con medición previa (pre-prueba) y con medición posterior (post-prueba) aplicadas en el grupo experimental y el grupo control.
2. Para la elección de la muestra se toman en cuenta los antecedentes académicos de los alumnos de las cuatro secciones correspondientes al Cuarto Grado de secundaria.
3. El grupo experimental y el grupo de control, se elige al azar (por simple sorteo), previa constatación de que su antecedente académico es homogéneo, ratificados con la administración de una prueba de requisitos (pre-prueba) en la primera semana de clases, mes de abril del año escolar 2005.

2. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

2.1. Operacionalización de la Variable independiente

A. Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas

La asignatura se desarrolla a través del módulo didáctico en forma personalizada, cuando los elementos y acciones que se desarrollan por parte del docente y los alumnos cumplen al menos en un 95% con los siguientes indicadores.

DOCENTE:

♦ **<u>Etapa de planificación y preparación del tema</u>:**

- El docente planifica, diseña y elabora el material de estudio previo un diagnóstico de la situación académico de los alumnos.
- Fija los objetivos y metas susceptibles de ser alcanzados al finalizar cada tópico estudiado.
- Organiza los contenidos temáticos en forma secuencial, con un nivel de profundidad adecuado.
- Presenta situaciones problemáticas previas al desarrollo de cada unidad modular.
- Prevé el uso de medios y materiales adicionales en cada unidad modular.
- Planifica y diseña los procedimientos de evaluación del aprendizaje.

♦ **<u>Etapa de presentación de los contenidos:</u>**

- Hace una diagnosis de requisitos para abordar el tema y realimenta los puntos débiles que tiene el alumno.
- Introduce adecuadamente el tema a estudiar a través de ejercicios de motivación referidos al tema.
- Presta asesoría personalizada continua a los grupos de trabajo absolviendo las dudas individuales y grupales.
- Permite la participación de los alumnos, a través de preguntas sobre las dudas que tienen referido al tema y resume de manera apropiada.
- Orienta el estudio grupal e individual, y realimenta el aprendizaje de los alumnos.
- Propicia el autoaprendizaje de los alumnos tanto grupal como individual.
- Propicia la autoevaluación, heteroevaluación y coevaluación permanente.

♦ **Etapa de fijación:**

- Plantea ejercicios y problemas de aplicación sobre los temas desarrollados.
- En la etapa de coevaluación cumple el rol de moderador.
- Resume los tópicos abordados en cada unidad.
- Realiza actividades de reforzamiento y realimentación.

ALUMNOS:

♦ **Etapa de planificación y preparación del tema:**

- Participan en forma indirecta en la etapa de planificación, diseño y elaboración del material a través de su historial académico del grado anterior.
- Participan en forma indirecta en la etapa de planificación, diseño y elaboración de las unidades modulares a través de sus respuestas a la prueba de requisitos.
- Tiene escasa participación en la fijación de objetivos y metas a lograr en el proceso enseñanza - aprendizaje.

♦ **Etapa de presentación de los contenidos:**

- Identifican y asimilan los requisitos antes de abordar el estudio del tema.
- Los objetivos y los contenidos conocen con antelación.
- Desarrollan las unidades modulares de acuerdo a sus motivaciones individuales y grupales orientados por el profesor.
- Estudian las unidades modulares en forma personalizada, poniendo dinamismo voluntad propia en su aprendizaje.
- Reciben asesoría permanente del profesor, respecto de las dificultades individuales y grupales en su aprendizaje.
- Participan en forma activa, a través de preguntas y dudas sobre el tema y lo resumen de manera apropiada.
- Refuerzan su aprendizaje teniendo a su disposición el material de estudio adicional.

♦ **Etapa de fijación:**

- Desarrollan los ejercicios de comprobación del aprendizaje planteados en cada unidad modular.
- Autorefuerza su aprendizaje del tema en cada unidad modular.
- Participa en forma activa en las actividades de autoevaluación, heteroevaluación y coevaluación.

B. Enseñanza tradicional de las funciones trigonométricas

Los tópicos de la trigonometría se desarrollan utilizando el método tradicional, cuando los elementos y acciones del proceso cumplen con los siguientes indicadores:

- El estudio de las funciones trigonométricas se da a partir de las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo respecto a uno de los ángulos agudos.
- Los alumnos avanzan el estudio del tema de acuerdo a la enseñanza expositiva que brinda el profesor.
- Se da énfasis en la comunicación oral y simbólica. Los alumnos tienen escasa posibilidad de reforzar su aprendizaje con materiales de estudio y con ayuda de algunos textos de matemática autorizados por el Ministerio de Educación.
- Los objetivos y contenidos a desarrollar sólo son conocidos por el profesor y escasas veces por los estudiantes.
- Los alumnos son receptores pasivos de la enseñanza impartida por el profesor, esporádicamente se realizan trabajos individuales y grupales.
- Los alumnos son partícipes sólo de la evaluación sumativa o final.

2.2. Variable dependiente (Rendimiento académico en el aprendizaje de las Funciones trigonométricas)

Definición conceptual	Se denomina ***rendimiento académico*** al dictamen final sobre el aprendizaje logrado, que valora los conocimientos o capacidades adquiridas de los alumnos referido a un determinado contenido durante un proceso de enseñanza-aprendizaje en función de los objetivos propuestos o previstos en un período de tiempo. El resultado se expresa con una calificación cuantitativa o cualitativa en el sistema vigesimal; por ejemplo los menores o iguales a diez son considerados desaprobados.
DEFINICIÓN OPERACIONAL	**Rendimiento académico en aprendizaje de las funciones trigonométricas** Expresada en los puntajes obtenidos por los alumnos en la prueba de requisitos, la eficacia mostrada en el desarrollo de talleres, en completar los espacios en blanco a lo largo del módulo, en resolver los ejercicios de comprobación del aprendizaje individual o grupal, resultados de las pruebas de proceso en el grupo experimental y el índice académico logrado en la prueba de salida de ítems estructurados de acuerdo con el dominio cognoscitivo de la taxonomía de Bloom.
INDICADORES	• Calificativos obtenidos en la prueba de requisitos. • Calificativos obtenidos en la evaluación de proceso. • Calificativos obtenidos en la evaluación de salida. • Actitudes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. • Participación en las actividades evaluativos.

ESCALA DE MEDICIÓN	ESCALA VIGESIMAL Rendimiento Deficiente [00 , 10] Rendimiento Suficiente [11 , 14] Rendimiento Satisfactorio [15, 17] Rendimiento excelente [18 , 20]

2.3. Variables secundarias o intervenientes (elementos influyentes en el proceso enseñanza-aprendizaje)

Influyen significativamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, generalmente afectan su viabilidad. Entre ellos consideramos:

DOCENTE: Constituye la variable más influyente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto por el grado de conocimiento de la materia que imparte, como por su estilo de organizar y presentar los temas de aprendizaje así como para comunicarse y transmitir valores a los alumnos. En la presente investigación, cada grupo de trabajo estuvo a cargo de un docente titulado y nombrado con más de 15 años de servicio.

OBJETIVOS: Lo que se espera que los alumnos logren durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, formulados de acuerdo a las capacidades y competencias que se desea lograr en los alumnos. Los docentes del grupo experimental y de control trabajan con el mismo objetivo general, pero diferentes objetivos específicos.

CONTENIDOS: El capítulo de trigonometría, sistematizados e impartidos de acuerdo a un cronograma preestablecido, con la finalidad de lograr los fines y competencias de la asignatura formulados con antelación.

MEDIOS Y MATERIALES: Los medios son canales a través de los cuales se comunican mensajes, mientras que los materiales son los que transmiten y transfieren mensajes concretos o favorecen la comunicación de mensajes. Ambos se usan en los grupos de control y experimental de acuerdo al criterio del profesor.

MÉTODO DEL PROFESOR: Proceso o camino seguido en la consecución del proceso enseñanza-aprendizaje. En el grupo experimental se trabaja en forma personalizada, con participación activa de los alumnos, tanto grupal como individual, con uso del módulo didáctico y otros materiales educativos; mientras en el grupo de control se trabaja con el procedimiento tradicional, con limitada participación de los alumnos.

EVALUACIÓN: Se aplica una prueba de requisitos a ambo grupos, las evaluaciones de proceso o formativas se realizan en cada grupo en forma independiente; y, se concluye aplicando una prueba de salida a ambos grupos, de acuerdo a los contenidos objetivos formulados en la unidad.

ENTORNO: La experiencia académica de la presente investigación se llevó a cabo en las aulas del colegio nacional "Hermilio Valdizán de Huánco".

NIVEL DE MOTIVACIÓN: Predisposición, deseo de aprender y superación personal de los alumnos en el estudio de la matemática.

ESTUDIO FUERA DE AULA: Número de horas asignados al estudio fuera de hora de clases de los alumnos.

HÁBITOS DE ESTUDIO: Habilidad práctica estable practicada por el alumno en el proceso de realización de sus tareas y otras actividades escolares.

PROBLEMAS PERSONALES: Cuestiones que impiden el normal desarrollo de concentración para el estudio fuera y dentro del centro educativo.

2.4. Variables extrañas

Variables cuya influencia se ignoran durante el proceso de investigación, entre ellas se consideran:

Sexo: masculino y femenino.

Edad: fluctúan entre 15 y 18 años.

Lugar de procedencia: distritos de Huanuco y Amarilis de la provincia de Huanuco.

Condición socio-económico: clase baja y clase media de la localidad de Huanuco.

Actividades de los padres: comerciantes, agricultores y empleados públicos

3. ESTRATEGIA PARA LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Se utilizó el diseño cuasiexperimental con pre-prueba y post-prueba con asignación no aleatoria de sujetos a los grupos, pero con elección aleatoria de los grupos: Experimental y de Control. A ambos grupos se administró la misma prueba de requisitos. Luego, al grupo experimental el tratamiento metodológico (enseñanza personalizada con módulos didácticos elaborado por el docente investigador) y el grupo de control desarrollan el mismo tema con el tratamiento tradicional. Finalmente, se administra una prueba de salida (post-prueba), del total de los contenidos desarrollados en 09 semanas de clase.

Pasos seguidos en el proceso de investigación:

1. Una vez establecido los grupos de estudio: Experimental y de Control, previa la constatación de sus antecedentes académicos homogéneos, se administra la misma prueba de requisitos, cuyos resultados se analizan e interpretan a través de métodos estadísticos descriptivos.

2. En el grupo experimental se lleva el proceso de enseñanza personalizada mediante un módulo didáctico, donde se aplica el diseño ***intragrupo*** en series temporales para la descripción y análisis de los resultados obtenidas de las evaluaciones de proceso administradas al finalizar el estudio de cada unidad modular.

El diseño ***intragrupo*** tiene el siguiente esquema:

Grupo experimental: Y_1 X $\boldsymbol{W}_1$ X $\boldsymbol{W}_2$ X $\boldsymbol{W}_3$ X $\boldsymbol{W}_4$ X Y_2

Grupo de control: : Y_3 Z Y_4

Donde:

X: Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas.

Z: Enseñanza tradicional de las funciones trigonométricas.

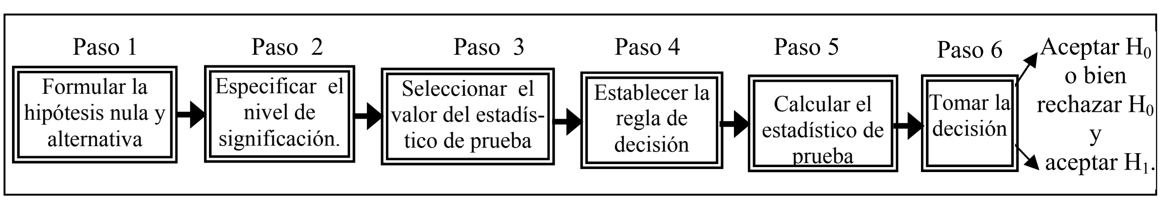
$\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_3$: Pre-prueba del grupo experimental y de control, respectivamente.

$\boldsymbol{W}_i$: Pruebas de proceso en el grupo experimental.

$\boldsymbol{Y}_2$, $\boldsymbol{Y}_4$: Prueba de salida del grupo experimental y de control, respectivamente.

-------- : El grupo experimental y de control son independientes,

3. Con los resultados de la prueba de salida se procede a probar la hipótesis formulada. La estrategia seguido para la prueba de hipótesis de la presente investigación consiste en seis pasos sistematizado por (Mason/Lind/Marchal, 2001:359-389), y David (1995), donde al llegar al paso 6, se tiene la capacidad de tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis formulada. La secuencia seguida, resume el esquema:



4. POBLACIÓN Y MUESTRA

a) Unidad de Análisis:

Conformado por los alumnos de dos secciones del quinto grado compuesto de 63 sujetos, a quienes se administró una prueba de requisitos (pre-prueba) antes del proceso de experimentación, luego se desarrolla el tema de Funciones Trigonométricas con estrategias didácticas distintas en cada grupo y al finalizar el trabajo de campo se aplica una prueba de salida (post-prueba) a ambos grupos.

b) Población de estudio:

Conformada por 143 alumnos (varones y mujeres) del quinto grado del colegio nacional Hermilio Valdizán, distribuidos en 80 alumnos en el turno mañana y 63 alumnos del turno tarde, matriculados en el año escolar 2005. Los sujetos que constituyen las cuatro secciones (bloques o conglomerados) ya están constituidos desde el primer grado de secundaria y son grupos con cierta estabilidad y homogeneidad en el rendimiento académico, asimismo tienen edad y condición socio-económica similares.

c) Muestra y su elección:

Muestra conformado por dos secciones del quinto grado de secundaria del colegio nacional "Hermilio Valdizán", de las cuatro secciones (conglomerados o estratos). Las dos secciones de la muestra quinto grado "C" y el quinto grado "D", ambos del turno tarde, se eligen previa comparación de sus antecedentes académicos del grado anterior en tres asignaturas troncales: Matemática, CTA y Comunicación y, mediante un procedimiento de aleatorización por bloques totales (o por conglomeración) resultó electo como grupo experimental el quinto grado "D" conformado por 31 alumnos, y como grupo de control el quinto grado "C" conformado por 32 alumnos. Muestra que es representativa de la estructura de la población, pues las cuatro secciones del quinto grado (estratos o conglomerados) que conforman la población poseen características biológicas, psicológicas y académicas homogéneas.

5. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

En orden secuencial y sistémico tendiente a plasmar los objetivos de la investigación se tuvo en cuenta:

5.1. Metodología

La metodología general utilizada en la investigación, teniendo aprobado el plan de tesis, ha comprendido:

1. Recolección de información referida a fuentes secundaria: bibliografía especializada en educación personaliza, en didáctica y de contenidos matemáticos.
2. Recolección, análisis e interpretación de información obtenida mediante fuentes primarias: encuestas, entrevistas, visitas y notas de campo. Previa a la realización de la investigación.
3. Formulación del marco teórico contextual y de temática en estudio, con revisión de literatura pertinente.
4. Diseño y elaboración de una propuesta alternativa (módulo didáctico) para la enseñanza de las funciones trigonométricas circulares.
5. Aplicación de la propuesta de enseñanza modular personalizada durante 9 semanas en el grupo experimental, y la administración de una misma prueba de salida a ambos grupos al finalizar el primer trimestre.
6. Comparación analítico crítico de los resultados obtenidos en la prueba de salida.
7. Redacción del Informe de los resultados obtenidos en el proceso experimental.

5.2. Técnicas e Instrumentos

1. Encuesta de valoración del proceso enseñanza-aprendizaje aplicado a los alumnos del quinto grado:

Nombre: Cuestionario de elección múltiple.

Objetivo: Conocer la opinión valoración de los alumnos que no recibieron la enseñanza personalizada modular referente a los distintos aspectos del proceso enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría desarrollados durante el primer semestre del año lectivo 2005.

Aplicación: Se administra al total de alumnos (125) del quinto grado de educación secundaria perteneciente a las tres secciones de la I.E. Hermilio Valdizán sin incluir al grupo experimental, al concluir el desarrollo del tema de funciones trigonométricas.

Estructura: El cuestionario está dividido en cinco áreas correspondientes a: opinión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, forma de estudio de los tópicos de la asignatura, área técnico-pedagógica, cualidades del docente de matemática y el nivel académico del docente de matemática. Teniendo en cuenta las escalas: 4 = excelente, 3 = buena, 2 = regular, 1 = deficiente.

2. Encuesta a los alumnos del grupo experimental y grupo de control:

Nombre: Cuestionario de elección múltiple.

Objetivo: Conocer la opinión de los estudiantes referente a los distintos aspectos de proceso enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas desarrollados durante el primer semestre del año lectivo 2005.

Aplicación: Se administra a 31 alumnos del grupo experimental y 32 alumnos del grupo de control al finalizar el segundo mes en el desarrollo de la trigonometría.

Estructura: El cuestionario está orientado a recabar opinión de los alumnos de aspectos referidos a: calificativo al aprendizaje logrado, uso de medios y materiales educativos, horas de estudio de las asignaturas fuera de aula, factores que dificultan el aprendizaje y los métodos empleados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría.

3. Encuesta de opinión sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la trigonometría

Se aplicó a los alumnos del grupo experimental, después de haber aplicado la estrategia metodológica durante nueve semanas (abril-junio del 2005), para constatar aspectos relacionados con el grado de satisfacción de los alumnos con la estrategia didáctica experimentada en la enseñanza de la trigonometría, que fue administrado por un docente neutral.

Objetivo: Conocer la opinión de los alumnos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria en el plano cartesiano a través de la enseñanza modular personalizada.

4. Encuesta a los docentes:

Se administró un cuestionario de alternativa múltiple a 60 docentes que dirigen la asignatura de matemática en el cuarto y quinto grado de secundaria, cuyos ítems están distribuidos desde las consideraciones generales del proceso enseñanza-aprendizaje, hasta algunas preguntas sobre temas de trigonometría. Cuyas respuestas sirvieron para fundamentar con objetividad la presente investigación. Ésta se lleva a cabo en la primera quincena del mes de mayo del 2005 (**anexo 2**).

5.3. Tratamiento de los grupos

- Las sesiones de clase, tanto en el grupo experimental y de control se lleva a cabo tomando como referencia el programa oficial de matemática para el quinto grado de secundaria, coincidiendo ambos grupos en el objetivo y contenido global del capítulo correspondiente a la Trigonometría.

- En el grupo experimental se hace uso de módulos como material educativo para reforzar el aprendizaje con tratamiento personalizado, que se complementa con el uso de: papelotes, para presentar contenidos conceptuales y procedimentales, reglas para hacer trazos lineales; compás para dibujar circunferencias; cuerdas flexibles, para trazos circulares y mostrar fenómenos periódicos; objetos de forma circular para manipular medidas de ángulos y arcos orientados. Mientras que en el grupo de control el proceso de enseñanza-aprendizaje, se llevó a cabo sólo en base al programa curricular con procedimiento tradicional, netamente expositiva y sin uso de material alguno elaborado por el docente.

La experimentación del trabajo se lleva de acuerdo al siguiente cronograma de tiempo:

Grupo	Horas Ped./semana	N° de semanas	N° total de horas	Turno
Experimental	06	09	54	Tarde
Control	06	09	54	Tarde

El proceso experimental se lleva a cabo durante **nueve semanas**, en el grupo experimental se desarrollan los siguientes temas:

Semana previa: (04-04-05 a 09-04-05); se administra la prueba de requisitos, luego se desarrolla los contenidos que corresponden a los ítems de la prueba de requisitos a modo de retroalimentación.

Primera semana: (11-04-05 a 15-04-05); Arcos orientados y función envolvente.

Segunda semana: (18-04-05 a 22-04-05); Ángulos y arcos orientados.

Tercera semana: (25-04-05 a 30-04-05): medidas de arcos y ángulos orientados.

Cuarta semana: (02-05-05 a 06-05-05): Funciones trigonométricas seno y coseno.

Quinta semana: (09-05-05 a 13-05-05): Funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, relaciones entre funciones trigonométricas.

Sexta semana: (16-05-05 a 20-05-05): Gráfica de las funciones trigonométricas.

Séptima semana: (23-05-05 a 27-05-05): Funciones trigonométricas inversas.

Octava semana: (30-05-05 a 03-06-05): Identidades trigonométricas.

Novena semana: (06-06-05 a 10.06-05) Administración de la prueba de salida.

5.4. Procedimiento de evaluación

a) Prueba de requisitos:

Esta prueba consiste en un cuestionario de 10 preguntas de temas referidos al álgebra y geometría elemental estudiados en grados anteriores por los sujetos de la muestra, los mismos que son necesarios para un estudio eficaz de los tópicos de la trigonometría en el quinto grado de secundaria.

Objetivo: La prueba de requisitos tuvo como objetivos:

1. Verificar si los grupos cumplen con los requisitos para la validez interna, expresados en el conocimiento y evocación de los temas desarrollados en grados anteriores, los mismos que sirven de base para desarrollar la trigonometría.

2. Posibilitar una realimentación en los temas que son insoslayables para entender con eficacia los diversos conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas, que se estudiará en forma personalizada a través de módulos.

La administración y calificación de la prueba de requisitos se realiza en la primera semana de clase del año lectivo, y cuya calificación estuvo a cargo del docente investigador.

b) Prueba de entrada de unidad modular:

Esta prueba consiste en un cuestionario cuyos ítems corresponden a los temas a tratar en cada unidad modular, los mismos se administran para saber qué conocimiento poseen los alumnos del tema a desarrollarse, antes de abordar el desarrollo del mismo.

Objetivo: Verificar si los alumnos del grupo experimental tienen algún conocimiento del tema a desarrollar en el estudio personalizado a través del módulo didáctico.

c) Prueba de proceso (de salida en cada unidad modular)

Se administra después de haber concluido el desarrollo de cada unidad modular por el docente investigador (en el grupo experimental), cuyos resultados se consideran como calificativos de la prueba de proceso.

d) Prueba de salida:

Se administra después de haber concluido el trabajo de campo en el grupo experimental durante 9 semanas de clases efectivas, cuyos ítems fueron elaborados de acuerdo a los niveles del dominio cognoscitivo de la taxonomía de Bloom.

Los objetivos de la evaluación de salida fueron:

1. Conocer el aprendizaje logrado referente a las funciones trigonométricas por los alumnos del grupo expserimental que estudiaron el tema mediante módulos en forma personalizada y el grupo de control que desarrollaron el mismo tema mediante el procedimiento tradicional.

2. Comparar el nivel de conocimiento de los tópicos de la Trigonometría entre los alumnos integrantes del grupo experimental y del grupo de control, para la confirmación o no de nuestra hipótesis de trabajo formulados con antelación y luego inferir conclusiones conducentes a la viabilidad de nuestra investigación.

3. Determinar el nivel de logro de los objetivos y metas propuestos en el estudio del tema a través de la enseñanza modular personalizada y emitir juicios valederos con miras a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas.

e) Ficha de observación y autoevaluación

Consiste en un cuestionario de preguntas abiertas de valoración y actitudes del proceso de enseñanza-aprendizaje de los temas de trigonometría desarrollados. A través de ella se expresa una opinión valorativa y crítica de los diversos aspectos de la actividad educativa.

f) Ficha de observación de actitudes en clase

Consiste en una tabla donde se detallan las actitudes observables de los alumnos en el desarrollo de la asignatura, donde se señalan indicadores referidos a identificar si el alumno escucha opiniones de los demás, tiene iniciativa para plantear estrategias en la resolución de problemas, aporta ideas con sentido lógico; valora el aporte de los compañeros en la resolución de problemas; solicita asesoría para resolver problemas, y si coordina en la conducción del grupo y realización de tareas comunes.

g) Ficha de observación de actividades en clase

Esta ficha consiste en una tabla que recopila las observaciones durante las actividades de clase, donde se señalan cuestiones referidos a identificar si el alumno: reconoce los ejercicios dados y los resuelve; responde a las interrogantes que se formulan durante el desarrollo del módulo, compara sus resultados obtenidos con sus pares, discute los conceptos referidos a los temas tratados, explica a sus compañeros de clase la secuencia seguida en la resolución de problemas, y recrea los ejemplos observados, desarrollados y analizados.

5.5. Pasos seguidos en la ejecución del trabajo de Investigación

-) Se diseñó y elaboró el módulo didáctico, así como los cuestionarios de la prueba de requisitos, de proceso y de salida.

-) Se informó y recibió la autorización del asesor para la realización de la experimentación de la estrategia didáctica de enseñanza modular personalizada.

-) Se determinó los grupos de la muestra: experimental y de control, previa aplicación de la pre-prueba.

-) Se realizo el proceso de experimentación de la propuesta durante nueve semanas en el grupo experimental.

-) Se aplicó la prueba de salida a ambos grupos simultáneamente en una sesión de clase de duración (2 horas pedagógicas).

-) Se depuró y calificó los datos obtenidos en la prueba de salida.

-) Se presentó los datos empleando la frecuencia porcentual.

-) Se sometió los datos a tratamiento estadístico descriptivo e inferencial.

-) Se analizó y discutió los resultados obtenidos.

-) Se redactó el informe en borrador.

-) Se realizó una corrección de estilo.

-) Se realizan informes parciales al asesor.

-) Se presentó el informe final para los revisores.

5.6. Tratamiento estadístico e interpretación de cuadros

-) Se presentan los resultados en cuadros y gráficos estadísticos para visualizar los resultados obtenidos en las encuestas y las pruebas de requisitos, de proceso y de salida, y se analizan a través de la estadística descriptiva.

-) Para un cálculo preciso de los estadísticos descriptivos, coeficiente de correlación y estimación de parámetros se utilizó los softwares MiniTab, Ms Excel y SPSS.

-) La prueba de hipótesis se hizo un nivel de significación o riesgo de $\alpha = 0,05$ (o 0,95 de confiabilidad), se aplicó el estadístico ***T*** de Student para contrastar la hipótesis de investigación, la misma que determinó el logro de los objetivos

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

1. TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

1.1. Tipo de investigación

Siguiendo los tipos y métodos de Investigación Educativa propuesta por Schroeder (1999) la investigación realizada:

- **Por su finalidad:** ***aplicada***,.
- **Por su alcance temporal:** ***sincrónica***.
- **Por su profundidad:** ***descriptiva y explicativa***,
- **Por su amplitud:** ***microeducacional***,.
- **Por su carácter:** ***cuantitativo***,
- **Por su marco:** *empírica*, *experimental* y *encuestas*.
- **Por el tipo de estudio:** ***piloto*** *y* ***evaluativo***.
- **Por el objeto al que se refiere:** disciplinar.

1.2. Diseño de investigación

El diseño cuasiexperimental con pre-prueba y post-prueba elegidos aleatoriamente para la comprobación de la hipótesis causal concuerda con la propuesta por Campbell y Stanley (1966), reproducidos por (Hernández, 1997:177). En términos de García Hoz (1994), es denominado diseño ***entregrupos*** y tiene el siguiente esquema:

Grupo experimental:	Y_1	**X**	Y_2
Grupo de control:	Y_3	Z	Y_4

Donde:

X: Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas.

Z: Enseñanza tradicional de las funciones trigonométricas.

Y_1, Y_3: Prueba de requisitos del grupo Experimental y de Control, respectivamente.

Y_2, Y_4: Prueba de salida del grupo Experimental y de Control, respectivamente.

-------------: El grupo Experimental y el grupo de Control son independientes.

2.3. Variables secundarias o intervenientes (elementos influyentes en el proceso enseñanza-aprendizaje)

2.4. Variables extrañas

3. ESTRATEGIA PARA LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6	
Formular la hipótesis nula y alternativa →	Especificar el nivel de significación. →	Seleccionar el valor del estadístico de prueba →	Establecer la regla de decisión →	Calcular el estadístico de prueba →	Tomar la decisión	Aceptar H_0 o bien rechazar H_0 y aceptar H_1.

4. POBLACIÓN Y MUESTRA

a) Unidad de Análisis:

b) Población de estudio:

c) Muestra y su elección:

5. Técnicas e Instrumentos

1. **Encuesta de valoración del proceso enseñanza-aprendizaje aplicado a los alumnos del quinto grado:**
2. **Encuesta a los alumnos del grupo experimental y grupo de control:**
3. **Encuesta de opinión sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la trigonometría**
4. **Encuesta a los docentes:**

5.3. Tratamiento de los grupos

La experimentación del trabajo se lleva de acuerdo al siguiente cronograma de tiempo:

Grupo	Horas Ped./semana	N° de semanas	N° total de horas	Turno
Experimental	06	09	54	Tarde
Control	06	09	54	Tarde

5.4. Procedimiento de evaluación

a) Prueba de requisitos:

b) Prueba de entrada de unidad modular:

c) Prueba de proceso (de salida en cada unidad modular)

d) Prueba de salida:

e) Ficha de observación y autoevaluación

f) Ficha de observación de actitudes en clase

g) Ficha de observación de actividades en clase

5.5. Pasos seguidos en la ejecución del trabajo de Investigación

5.6. Tratamiento estadístico e interpretación de cuadros

CAPÍTULO IV

PROCESO DE CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. PRESENTACIÓN, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

Para el sustento empírico del estudio realizado, una vez recolectado los datos teniendo en cuenta la problemática formulada, los objetivos planteados y las hipótesis conjeturadas, pasamos a presentar y analizar los datos empíricos recolectados mediante encuestas y pruebas de acuerdo a un orden preestablecido.

1.1. Encuesta de valoración del proceso enseñanza-aprendizaje

Encuesta de elección múltiple cuyo objetivo es recoger la opinión valorativa de 125 alumnos que no forman parte del grupo experimental, referente a los distintos aspectos de proceso enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría desarrollados durante el primer semestre del año lectivo 2005.

TABLA N° 1: RESULTADOS DEL TEST APLICADO A 125 ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA SOBRE EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE.

1. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE					
REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente	Total
a) Calificativo a la enseñanza recibida de funciones trigonométricas	22 17,6%	45 36,0%	34 27,2%	24 19,2%	125 100%
b) Aprendizaje logrado sobre las funciones trigonométricas.	25 20,0%	44 35,2%	35 28,0%	21 16,8%	125 100%
c) Libros de consulta recomendado por el profesor.	21 16,8%	36 28,8%	46 36,8%	22 17,6%	125 100%
d) El uso de medios informáticos en la enseñanza-aprendizaje.	49 39,2%	40 32,0%	28 22,4%	08 6,4%	125 100%
e) Método didáctico del profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje.	19 15,2%	45 36,0%	41 32,8%	20 16,0%	125 100%
TOTAL	136	210	184	95	625
Porcentaje Global	21,76%	33,6%	29,44%	15,20%	

REACTIVO: **Calificativo a la enseñanza recibida de funciones trigonométricas**; Una mayoría que representa al 36,0% considera que la enseñanza recibida fue regular, seguido del 27,2% que considera que la enseñanza recibida es buena, el 19,2% considera la enseñanza recibida de excelente, y el resto que representa al 17,6% considera que fue deficiente. De lo descrito, más del 50% están disconformes con la enseñanza recibida.

REACTIVO: **Aprendizaje logrado sobre las funciones trigonométricas**; El 20,0% de los encuestados considera que el aprendizaje logrado es deficiente; 35,2% lo considera regular; el 28,0% manifiesta que tuvo aprendizaje bueno, y sólo el 16,8% considera haber obtenido un aprendizaje excelente de las funciones trigonométricas.

REACTIVO: **Libros de consulta recomendados por el profesor**; el 16,8% de los encuestados consideran que los libros de consulta son deficientes; 28,8% lo considera regular; el 36,8% manifiestan que los textos son buenos; y, el 17,6% restante considera que los textos usados son excelentes.

REACTIVO: **El uso de medios informáticos en el proceso de enseñanza aprendizaje**; Una mayoría que representa al 39,2% consideran que el uso de medios informáticos es deficiente, el 32,0% considera que es regular, seguido del 22,4% consideran que el uso es buena y sólo 6,4% consideran que fue excelente. Esta respuesta es debido que el docente no los usan, fundamentalmente por desconocimiento.

REACTIVO: **Método didáctico utilizado por en profesor en el proceso E-A**: El 15,20% considera que el método didáctico utilizado por el profesor es deficiente, mientras que el 36,0% los considera como regular, el 32,8% los cataloga como buena y sólo el 16,0% considera como excelente. Los que se reflejan en los calificativos.

En opinión global sobre la forma del proceso de enseñanza-aprendizaje, el 33,6% le asigna un calificativo de regular, el 29,44% lo considera como buena, el 21,76% lo considera como deficiente y sólo el 15,20% lo califica de excelente.

TABLA N° 2: RESULTADOS DEL TEST APLICADO A 125 ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA SOBRE LA FORMAS DE ESTUDIAR.

2. FORMA DE ESTUDIAR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.					
REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente	Total
a) En forma individual en base a las clases recibidas.	25 20,0%	42 33,6%	48 38,4%	10 8,0%	125 100%
b) En grupo sólo con ayuda de apuntes de la clase.	29 23,2	39 31,2%	49 39,2%	08 6,4	125 100%
c) En forma individual con ayuda de libros de matemática.	28 22,4%	45 36,0%	36 28,8%	16 12,8%	125 100%
d) En grupo con ayuda de diversos libros de matemática.	30 24,0%	37 29,6	44 35,2%	14 11,2%	125 100%
e) Mediante el auto-estudio.	25 20,0%	36 28,8%	46 36,8%	18 14,4%	125 100%
TOTAL	137	199	223	66	625

REACTIVO: **En forma individual en base a las clases recibidas**; La mayoría de los encuestados, el 38,4% considera que la forma de estudiar en forma individual en base a las clases recibidas es buena, seguido del 33,6% que lo considera regular, mientras que para el 20,0% es deficiente y sólo para el 8,0% es excelente.

REACTIVO: **En grupo sólo con ayuda de apuntes de la clase**; El 39,2% de los encuestados los considera buena, el 31,2% considera regular, mientras que el 23,2% asume que es deficiente y sólo 6,4% considera excelente.

REACTIVO: **En forma individual con ayuda de libros de Matemática**; el 36,0% lo consideran como regular; seguido del 28,8% que consignan que es buena; el 22,4 manifiestan que es deficiente; y, el 12,8% restante consideran como excelentes.

REACTIVO: **En grupo con ayuda de diversos libros de Matemática**; La mayoría de los encuestados, el 35,2% asumen que es buena, el 29,6% consideran que es regular, mientras el 24,0% considera deficiente y sólo el 11,2% considera que es excelente.

REACTIVO: **Mediante el auto-estudio**: Una mayoría que representa al 36,8% los considera bueno, seguido del 28,8% que considera regular, el 20,0% consideran deficiente y el 14,4% restante consideran que es excelente.

TABLA N° 3: RESULTADOS DEL TEST APLICADO A 125 ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA REFERIDO AL ÁREA TÉCNICO-PEDAGÓGICO.

3. VALIDACIÓN DEL ÁREA TÉCNICO-PEDAGÓGICO					
REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente	Total
a) Motiva y recapitula los contenidos estudiados.	43 34,4%	41 32,8%	38 30,4%	03 2,4%	125 100%
b) Estimula y mantiene expectativas de aprendizaje.	54 43,2%	34 27,2%	29 23,2%	08 6,4%	125 100%
c) Uso de medios instrumentales para hacer clases interesantes.	46 36,8%	39 31,2%	34 27,2%	06 4,8%	125 100%
d) Expresión verbal y comunicación durante la clase.	35 28,0%	44 35,2%	36 28,8%	10 8,0%	125 100%
e) Utilización de la enseñanza personalizada.	49 39,2%	45 36,0%	24 19,2%	07 5,6%	125 100%
TOTAL	227	203	161	34	625

REACTIVO: **Motiva y recapitula los contenidos estudiados**; Una mayoría que representa al 34,4% considera que la motivación es deficiente, seguido del 32,8% que consideran regular; 30,4% consideran buena; y sólo el 2,4% restante considera que es excelente.

REACTIVO: **Estimula y mantiene expectativas de aprendizaje**; La mayoría que representa el 43,2% consideran como deficiente; el 27,2% lo considera regular; el 23,2% manifiestan que es buena, y sólo el 6,4% consideran excelentes.

REACTIVO: **Uso de medios instrumentales para hacer clases interesantes**; el 36,8% de los encuestados consideran que el uso es deficiente; 31,2% lo considera regular; el 27,2% manifiestan que son buenos; y, sólo el 4,8% dicen que son excelentes.

REACTIVO: **Expresión verbal y comunicación durante la clase**; Una mayoría que representa al 35,2% de los encuestados califican de regular; seguido del 28,8% consideran que es buena, el 28,0% considera que es deficiente, y el 8,0% considera que es excelente.

REACTIVO: **Utilización de la enseñanza personalizada**: Una mayoría que representa al 39,2% de los encuestados los considera deficiente, seguido del 36,0% consideran regular; el 19,2% consideran bueno, y el 5,6% restante considera deficiente.

TABLA N° 4: RESULTADOS DEL TEST APLICADO A 125 ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA SOBRE OPINIÓN DE LA CUALIDAD DOCENTE.

4. CALIFICACIÓN DE CUALIDADES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA.					
REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente	Total
a) Conocimiento de los temas que desarrolla en clase.	20 16,0%	54 43,2%	27 21,6%	24 19,2%	125 100%
b) Manejo de los diversos procedimientos didácticos y metodológicos.	26 20,8%	47 37,6%	32 25,6%	20 16,0%	125 100%
c) Adecuación de los temas de estudio a la realidad del alumno.	42 33,6%	39 31,2%	36 28,8%	08 6,4%	125 100%
d) Innovación en los contenidos curriculares y metodológicos.	44 35,2%	46 36,8%	29 23,2%	06 4,8%	125 100%
e) Conocimiento de los elementos del currículo y métodos activos.	33 26,4%	53 42,4%	24 19,2%	15 12,0%	125 100%
TOTAL	165	239	148	73	625

REACTIVO: **Conocimiento de los temas que desarrolla en clase**; La mayoría que representa el 43,2% consideran como regular, seguido del 21,6% que consideran como buena; el 19,2% consideran como excelente, y el resto que representan al 16,0% considera que es deficiente.

REACTIVO: **Manejo de los diversos procedimientos didácticos y metodológicos**; El 20,8% de los encuestados consideran que es deficiente; 37,6% lo considera como regular; el 25,6% manifiestan que es bueno, y el 16,0% restante consideran como excelente.

REACTIVO: **Adecuación de los temas de estudio a la realidad del alumno**; el 33,6% de los encuestados consideran que son deficientes; 31,2% lo considera regular; el 28,8% asumen que son buenos; y, sólo el 6,4% restante consideran como excelentes.

REACTIVO: **Innovación en los contenidos curriculares y metodológicos**; La mayoría que representan al 36,8% consideran regular, seguido del 35,2% consideran deficiente; el 23,2% catalogan de bueno, y el 4,8% consideran como excelente.

REACTIVO: **Conocimiento de los elementos del currículo y métodos activos**: El 42,4% de los encuestados consideran que es regular, seguido del 26,4% que considera que es deficiente; el 19,2% considera que es buena, y el 12,0% restante considera que es excelente.

TABLA N° 5: RESULTADOS DEL TEST APLICADO A 125 ALUMNOS DEL QUINTO GRADO DE SECUNDARIA DEL ÁREA ACADÉMICO-DOCENTE.

5. REFERIDO AL ÁREA ACADÉMICO - DOCENTE.					
REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente	Total
a) Información acerca de los objetivos del tema a desarrollar en clase.	36 28,8%	39 31,2%	31 24,8%	19 15,2%	125 100%
b) Solvencia y profundidad en el conocimiento de su tema.	24 19,2%	55 44,0%	39 31,2%	07 5,6%	125 100%
c) Manejo correcto de los términos en clase.	42 33,6%	34 27,2%	27 21,6%	22 17,6%	125 100%
d) Cumple con el desarrollo del programa establecido.	27 21,6%	32 25,6%	48 38,4%	18 14,4%	125 100%
e) Manejo de las técnicas e instrumentos de evaluación.	32 25,6%	47 37,6%	38 30,4%	08 6,4%	125 100%
TOTAL	161	207	183	74	625

REACTIVO: **Información acerca de los objetivos del tema a desarrollar en clase**; La mayoría que representa al 31,2% de los encuestados consideran como regular, seguido del 28,8% considera que es deficiente; el 24,8% asumen que es buena; y, el 15,2% consideran que es excelente.

REACTIVO: **Solvencia y profundidad en el conocimiento de su tema**; El 19,2% de los alumnos encuestados consideran como deficiente; 44,0% lo consideran regular; el 31,2% catalogan de bueno; y, el 5,6% restante considera como excelente.

REACTIVO: **Manejo correcto de los términos en clase**: La mayoría que representa al 33,6% consideran deficientes; 27,2% lo considera regular; el 21,6% manifiestan que son buenos; y, el 17,6% restante considera que es excelente.

REACTIVO: **Cumple con el desarrollo del programa establecido**: La mayoría que representa al 38,4% considera como buena, seguido del 25,6% que considera que es regular, el 21,6% considera que el cumplimiento deficiente; y, el 14,4% considera que se cumple en forma excelente.

REACTIVO: **Manejo de las técnicas e instrumentos de evaluación**: Una mayoría relativa que representa el 37,6% de los encuestados considera como regular, seguido del 30,4% considera como buena, el 25,6% considera que el manejo de técnicas e instrumentos de evaluación es deficiente; y, sólo el 6,4% manifiesta que es excelente.

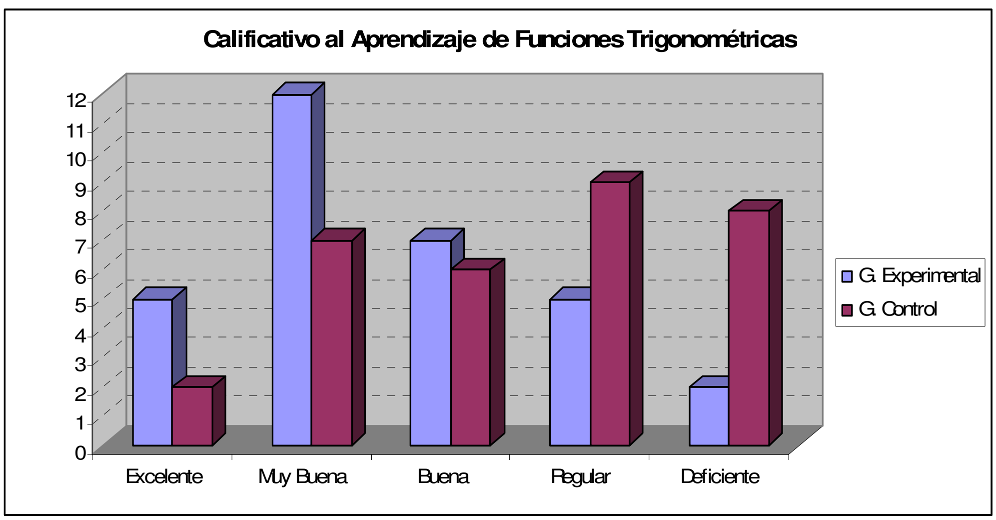
1.2. Encuesta a los estudiantes del grupo experimental y grupo de control.

Encuesta de elección múltiple aplicado al grupo Experimental y de Control, cuyo objetivo fue conocer la opinión de los estudiantes referente a los distintos aspectos que intervienen durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría desarrollado durante el primer semestre del año lectivo 2005. Las mismas que se resumen y visualizan en las tablas y gráficas, respectivamente.

TABLA N° 6. SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1. CALIFICATIVO AL APRENDIZAJE LOGRADO DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS						
	Excelente	Muy buena	Buena	Regular	Deficiente	TOTAL
Grupo Experimental	5 16,13%	12 38,71%	7 22,58%	5 16,13%	2 6,45%	31 100%
Grupo de Control	2 6,25%	7 21,875	6 18,75%	9 28,125%	8 25,00%	32 100%

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Grupo Experimental: En la tabla N° 6, se observa que del total de estudiantes (31), 5 alumnos que representan el 16,13% consideran que el aprendizaje logrado ha sido excelente; en tanto 12 (38,71%) manifiestan que su aprendizaje fue muy buena; mientras 7 alumnos (22,58%) califica como buena; 5 alumnos (16,13%) consideran regular; y, sólo 2 alumnos que representa al (6,25%) lo considera como deficiente.

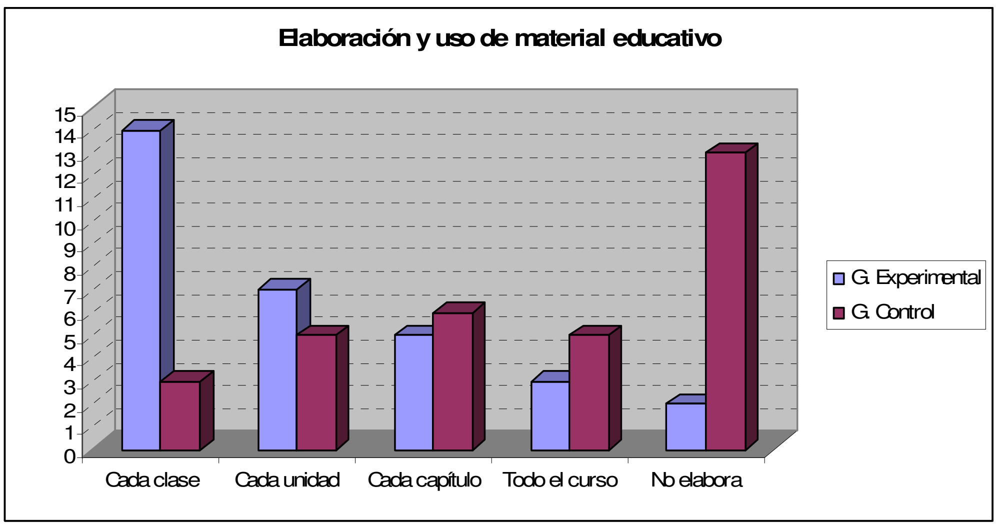
Grupo de Control: Del total de alumnos (32), sólo 2 alumnos (6,25%) consideran que el aprendizaje logrado ha sido excelente; 7 (21,875%) manifiestan que su aprendizaje fue muy buena; mientras 6 alumnos (18,75%) califican como buena el aprendizaje logrado; 9 alumnos (28,125%) consideran regular; y, 8 alumnos que representa al 25%, lo considera como deficiente.

De la descripción de resultados en la tabla N° 6 y la gráfica correspondiente, podemos concluir: los alumnos del grupo experimental consideran que el aprendizaje de las funciones trigonométricas fue cualitativa y cuantitativamente superior, puesto que (75% consideran que su aprendizaje fue entre bueno y excelente), frente al 45% del grupo de control en la misma categorización cualitativa.

TABLA N° 7: SOBRE ELABORACIÓN Y USO DE MATERIAL DIDÁCTICO.

2. ELABORACIÓN Y USO DE MATERIALES DIDÁCTICOS						
	Cada clase	Cada unidad	Cada capítulo	Todo el curso	No elabora	TOTAL
Grupo Experimental	14 45,16%	7 22,58%	5 16,13%	3 9,68%	2 6,45%	31 100%
Grupo de Control	3 9,375%	5 15,625%	6 18,75%	5 15,625%	13 40,625%	32 100%

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Grupo Experimental: De la tabla N° 7, se observa que del total de estudiantes (31), 14 alumnos (45,16%) manifiestan que el docente usa material didáctico en cada clase; 7 estudiantes (22,58%) expresen que lo hacen para cada unidad; 5 alumnos (16,13%) dicen que se usa en cada capítulo; 3 alumnos (9,68%) consideran que lo hacen para toda la asignatura; y, sólo 2 alumnos (6,45%) que el docente no usa material didáctico alguno.

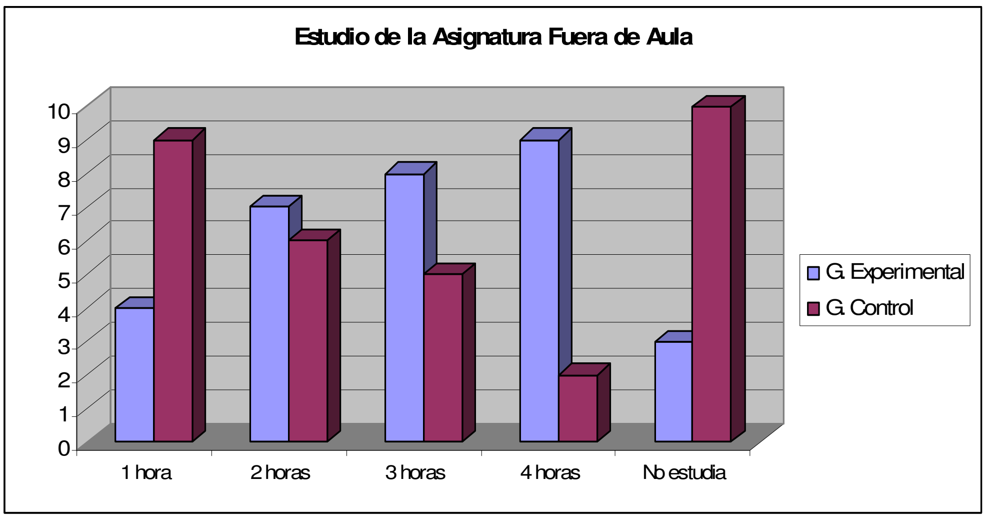
Grupo de Control: Sólo 3 alumnos que representan (9,375%) expresan que usan material didáctico en cada clase; 5 alumnos (15,625%) manifiestan que los usan en cada unidad; 6 alumnos (18,75%) asumen que se elabora y usa para cada capítulo; 5 alumnos (15,625%) considera que se elabora para toda la asignatura; y la mayoría 13 alumnos (40,625%) dicen que no se elabora ni usa material didáctico alguno.

Del resultado descrito, podemos concluir que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas los alumnos del grupo experimental reconocen la elaboración y uso de módulo didáctico en forma permanente (cada clase o unidad) por parte del docente y los alumnos, mientras en el grupo de control por lo general no se elaboran material didáctico o se usan en forma esporádica.

TABLA N° 8. SOBRE EL ESTUDIO FUERA DE HORAS DE CLASES.

3. ESTUDIO DE LA ASIGNATURA FUERA DE HORA DE CLASE						
	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas	No estudia	TOTAL
Grupo experimental	4 12,90%	7 22,58%	8 25,81%	9 29,03%	3 9,68%	31 100%
Grupo de Control	9 28,58%	6 18,75%	5 15,625%	2 6,25%	10 31,25%	32 100%

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Grupo Experimental: De los datos en la tabla N° 8, de los 31 alumnos, 4 alumnos que representan al 12,90% manifiestan que estudian matemática 1 hora por día fuera de aula; 7 (22,58%) manifiestan que estudian aproximadamente 2 horas por día; 8 (25,81%) lo hacen tres horas por día; 9 (29,03%) contestan que estudian en promedio 4 horas; y, sólo 3 (9,68%) restante manifiestan que no estudian.

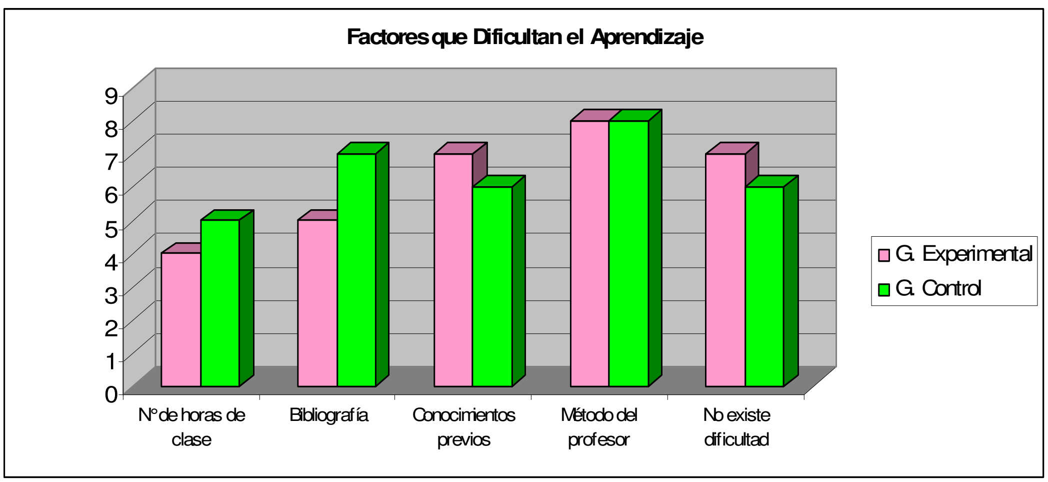
Grupo de Control: De los 32 alumnos, 9 alumnos (28,58%) expresan que estudian la asignatura a lo más 1 hora fuera de clase; 6 alumnos (18,75%) manifiestan, que estudian durante dos horas; 5 alumnos (15,625%) mencionan que estudian a lo más 3 horas; sólo 2 alumnos (6,25%) contestaron que practican y/o estudian 4 horas; y 10 de alumnos (31,25%) de los restantes expresa que no estudian ni practican fuera del aula.

De los resultados del grupo de control y experimental, concluimos que los alumnos del grupo experimental tienen mayor motivación y predisposición para el estudio y la práctica de la matemática (trigonometría) fuera de horas de clase, es gracias al uso del módulo didáctico; mientras en el grupo de control, la mayoría de los alumnos expresan no estudiar o sólo estudian 1 hora la asignatura fuera del aula, por falta de motivación pues no tienen a mano un material de aprendizaje adicional.

TABLA N° 9. SOBRE FACTORES QUE DIFICULTAN EL APRENDIZAJE.

4. FACTORES QUE DIFICULTAN EL APRENDIZAJE						
	N° de horas de clase	Bibliografía y materiales didácticos	Conocimientos Previos	Método usado por profesor	No tengo Dificultad	TOTAL
Grupo experimental	4 12,90%	5 16,13%	7 22,58%	8 25,81%	7 22,58%	31 100%
Grupo de Control	5 15,63%	7 21,88%	6 18,75%	8 25,0%	6 18,75%	32 100%

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Grupo Experimental: De los datos en la tabla N° 9, de los 31 alumnos, 4 (12,90%) manifiestan que dificulta su aprendizaje las reducidas horas de clase; 5 (16,13%) atribuyen a la no tenencia de libros y materiales didácticos; 7 (22,58%) consideran que es la falta de requisitos; 8 (25,81%) consideran como determinante el método didáctico utilizado por el profesor; y, 7 (22,58%) restante manifiestan que no tienen ningún factor que dificulte su aprendizaje.

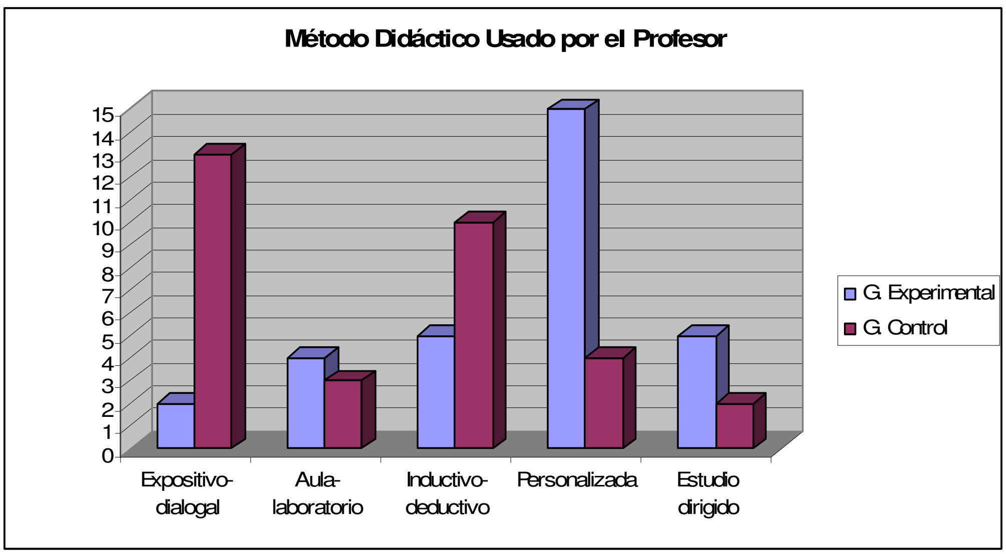
Grupo de Control: De los 32 alumnos, 5 (15,63%) manifiesta como factor que incide en su aprendizaje las pocas horas de clase; 7 (21,88%) atribuyen a la no tenencia de libros y materiales didácticos; 6 (18,750%) consideran que es la falta de requisitos o saberes previos; 8 (25%) aducen que es el método didáctico utilizado por el profesor; y, 6 (18,75%) restante manifiestan que no tienen ningún factor que dificulte su aprendizaje.

Según las respuestas descritas del grupo experimental no existe diferencia significativa entre las respuestas de los alumnos del grupo experimental y de control respecto a los factores que dificultan su aprendizaje, coincidiendo en mencionar la metodología como uno de los factores principales para el logro de aprendizajes; y, ligeramente tienen menos dificultad los alumnos del grupo experimental que estudian con el módulo didáctico en forma personalizada.

TABLA N° 10. SOBRE EL MÉTODO DIDÁCTICO USADO POR EL PROFESOR.

5. MÉTODOS DIDÁCTICOS USADOS POR EL PROFESOR						
	Expositivo dialogal	Aula laboratorio	Inductivo deductivo	Enseñanza personalizada	Estudio dirigido	TOTAL
Grupo experimental	2 6,45%	4 12,90%	5 16,13%	15 49,39%	5 16,13%	31 100%
Grupo de Control	13 40,63%	3 9,375%	10 31,25%	4 12,50%	2 6,25%	32 100%

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Grupo Experimental: De los datos en la tabla N° 10, de los 31 alumnos, sólo 2 (6,45%) manifiestan que reciben una enseñanza expositiva-dialogal; 4 (12,90%) manifiestan que estudian con el método aula-laboratorio; 5 (16,13%) manifiesta que realiza a través del método inductivo-deductivo; la mayoría 15 (49,39%) identifican la enseñanza personalizada-modular; y, 5 (16,13%) restante manifiestan que el docente utiliza el método de estudio dirigido.

Grupo de Control: De los 32 alumnos, 13 (40,625%) manifiestan que reciben una enseñanza expositiva-dialogal; 3 (9,375%) manifiestan que estudian con el método aula-laboratorio; 10 (31,25%) consideran que el profesor utiliza el método inductivo-deductivo; 4 (12,50%) consideran que llevan a través de enseñanza personalizada; y, sólo 2 (6,25%) restante manifiestan que el docente utiliza el método de estudio dirigido.

De lo descrito se puede concluir que el proceso de aprendizaje en el grupo experimental a través de módulos en forma personalizada ha sido claramente identificado por los alumnos; que en su mayoría muestran conformidad con la metodología empleada; mientras en el grupo de control la estrategia didáctica de más arraigo es la expositiva, la misma que tiene más falencias que la enseñanza personalizada mediante módulos didácticos.

1.3. Encuesta de opinión sobre el proceso enseñanza-aprendizaje (G.E.)

Aplicado a los sujetos del Grupo Experimental después de la implementación de la estrategia de enseñanza modular personalizada durante nueve semanas (junio 2005), para conocer aspectos relacionados con el grado de satisfacción de los alumnos con la estrategia didáctica implementada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas.

TABLA N° 11: RESUMEN DE LA ENCUESTA APLICADO A 31 ALUMNOS DEL QUINTO GRADO "D"-GRUPO EXPERIMENTALL.

REACTIVOS	RESPUESTAS Y PORCENTAJES				TOTALES
	muy buena	buena	regular	deficiente	
1. Aprendizaje logrado de la trigonometría	10 32,26%	16 51,61%	5 16,13%	0 00,00%	31 100%
2. Forma de enseñar del profesor.	14 45,16%	11 35,48%	5 16,13%	1 3,23%	31 100%
3. Preparación académica del profesor.	15 48,39%	13 41,94%	3 9,68%	0 00,00%	31 100%
4. Contenidos del módulo didáctico.	14 45,16%	13 41,94%	4 12,90%	0 00,00%	31 100%
5. Método utilizado por el profesor.	14 45,16%	12 38,71%	5 16,13%	0 00,00%	31 100%
6. Motivación para seguir estudios superiores.	13 41,94%	11 35,48%	7 22,58%	0 00,00%	31 100%
7. Utilidad del módulo didáctico.	15 48,39%	12 38,71%	4 12,90%	0 00,00%	31 100%
8. Resultados del aprendizaje personalizada (individual y grupal)	11 35,48%	15 48,39%	5 16,13%	0 00,00%	31 100%

FUENTE: Elaboración propia con datos de la encuesta aplicado al grupo experimental

1. **Aprendizaje logrado sobre trigonometría:** El 51,60% de los encuestados del grupo experimental considera que el aprendizaje logrado fue buena; mientras que el 32,26% consideran que el aprendizaje logrado sobre funciones trigonométricas fue muy buena. Opinión que se ratifica en los resultados de la prueba de salida, cuyos resultados fueron superiores a los del grupo de control.

2. **Forma de enseñar del profesor:** El 35,48% de los encuestados del grupo experimental considera que el aprendizaje logrado fue buena; mientras que el 45,16% consideran que el aprendizaje logrado sobre funciones trigonométricas fue muy buena. Opinión que se ratifica en los resultados de la prueba de salida, cuyos resultados fueron superiores a los del grupo de control.
3. **Respecto a la preparación académica del profesor:** El 41,94% de los encuestados del grupo experimental considera que el aprendizaje logrado fue buena; mientras que el 38,39% consideran que el aprendizaje logrado sobre funciones trigonométricas fue muy buena. Opinión que se ratifica en los resultados de la prueba de salida, cuyos resultados fueron superiores a los del grupo de control.
4. **Contenidos del Módulo Didáctico:** El 45,16% de los alumnos del grupo experimental consideran que el contenido desarrollado es muy buena; mientras que el 41,94% consideran que los califican de buena, y sólo el 12,90% considera que el contenido del módulo didáctico ha sido desarrollado de manera regular. Opinión que valida la utilidad del módulo didáctico para un estudio eficiente de las funciones trigonométricas.
5. **Método utilizado por el profesor:** El 45,16% de los alumnos del grupo experimental consideran que la metodología de enseñanza del profesor es muy buena, el 38,71% le considera como buena, y sólo el 16,13% lo considera como regular. Lo que nos manifiesta que la enseñanza modular personalizada es una metodología eficiente para el aprendizaje de las funciones trigonométricas.
6. **Motivación para seguir estudios superiores:** De los encuestados, 13 que representan al 41,93% de los alumnos del grupo experimental considera que la motivación para el estudio es muy buena, el 35,48% lo considera como buena para seguir estudios superiores, y el 22,58% restante considera que está regularmente motivado para proseguir estudios superiores. En consecuencia, la enseñanza modular es también una fuente de motivación para seguir estudios superiores.
7. **Respecto a la utilidad del módulo didáctico:** El 48,39% de los alumnos califican de muy bueno la utilización del módulo didáctico en la enseñanza de la trigonometría; el 38,71% considera que tiene buena utilidad; y, sólo el 12,90% restante lo considera como regular. En consecuencias, los alumnos, en su mayoría, tienen opinión favorable a la utilidad del módulo.
8. **Sobre el resultado del aprendizaje personalizado de la trigonometría:** El 35,48% de los alumnos expresan que el aprendizaje personalizado (individual y grupal) es muy buena; el 48,39% lo cualifica de buena y sólo el 16,13% lo considera como regular. Es decir, los alumnos mayoritariamente consideran que el método de enseñanza personalizada a través de módulos didácticos propicia un aprendizaje significativo.

1.4. De la Prueba de Requisitos (Pre-Prueba)

De acuerdo al diseño de investigación establecido y los objetivos de la investigación esta prueba consiste en un cuestionario de preguntas diversas para evaluar los conocimientos matemáticos de grados anteriores (previos) que trae consigo el estudiante, los mismos que son necesarias para abordar en forma eficaz y eficiente el estudio de las funciones trigonométricas y sus aplicaciones (anexo N° 6).

Objetivos de la pre-prueba:

- Verificar si los grupos cumplen con los requisitos para la validez interna, expresados en el conocimiento y evocación de los tópicos desarrollados en los temas previos, vistos en procesos anteriores; los mismos que sirven de base para el estudio de los tópicos de la trigonometría.
- Posibilitar una realimentación en los temas que son insoslayables para entender con eficiencia los diversos conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas, que se abordará haciendo uso del módulo didáctico.

La administración y calificación de la prueba se llevó a cabo la primera semana de abril del año 2005, y la calificación estuvo a cargo del docente investigador.

Resultados obtenidos en la pre-prueba:

TABLA N° 12: RESUMEN DE RESULTADOS DE LA PRUEBA DE REQUISITOS DEL GRUPO EXPERIMENTAL Y EL GRUPO DE CONTROL

	Quinto Grado "D" (Grupo Experimental)	Quinto Grado "C" (Grupo de Control)
N° de alumnos	31	32
Nota mayor	15	16
Nota menor	04	06
Rango	11	10
Promedio	09,3	09,66
Varianza	8,49	7,72
Desviación estándar	2,91	2,78
Coeficiente de variación	31,3%	28,8%

FUENTE: Elaboración propia de resultados de la prueba de requisitos (anexo N° 6)

1. Los alumnos mostraron deficiencia casi generalizado en: identificar una función; hallar el dominio y el rango de una función; reconocer funciones pares, impares, creciente, decreciente y biyectiva; asimismo en identificar los puntos simétricos en el plano cartesiano. Tuvieron menos errores en: identificar una función periódica;

hallar la distancia entre dos puntos del plano cartesiano; identificar si un punto pertenece a un cuadrante o a una ecuación; también en calcular los elementos de un triángulo rectángulo.

2. En el 5° "D" se obtuvo la nota 15 como calificativo mayor y como calificativo menor 04; mientras que en el 5° "C" se obtuvo como nota mayor 16 y como nota menor 06, diferenciándose las distancias entre la nota menor y mayor sólo en un punto. Además el promedio de los calificativos obtenidos en el 5° "D" es 09,32; mientras que en el 5° "C" es de 09,66; el coeficiente de variación de las notas de ambas secciones son del 31,3% y 28,8%, respectivamente, y la diferencia de éstos no es significativo (anexo N° 6). Estos resultados ratifican el rendimiento académico de los alumnos del Grado anterior que era deficiente y casi equivalentes.

3. El rendimiento académico en las dos secciones de acuerdo a los calificativos obtenidos es deficiente y homogéneo en el conocimiento de los requisitos para abordar el estudio de las funciones trigonométricas. En consecuencia, es pertinente una realimentación para reforzar en los temas que debe conocer el estudiante con miras a abordar de manera apropiada el estudio de las funciones trigonométricas en el grupo experimental.

1.5. Resultados de las pruebas de proceso (grupo experimental)

La evaluación de proceso fue administrada al finalizar el estudio de cada unidad modular (cinco pruebas), las mismas que fueron de carácter individual. Las notas obtenidas en estas pruebas se presentan en tabla de distribución de frecuencia:

En la **Tabla N° 13**, en las puntuaciones de los 31 alumnos, se observa que 11 alumnos que representan al 36% del total tienen notas de 15 a 17 (rendimiento satisfactorio), seguido de las notas de 11 a 14 (rendimiento suficiente) que representan al 32% de los alumnos, 9 alumnos que representan al 29% tienen rendimiento deficiente, y sólo un alumno que representa al 3% de los alumnos tiene rendimiento excelente. Asimismo, el promedio de notas de los alumnos es 356/31 = 11,48, desviación estándar 5,32 y coeficiente de variación 46,4%. Los calificativos del 68% de los estudiantes están en la escala valorativa de suficiente a excelente.

Tabla N° 13: Resultados obtenidos en la prueba de la unidad 1 del módulo didáctico grupo experimental.

ESCALA VALORATIVA	**Notas** **[L_i - L_s]**	m_i	f_i	***F*i**	***h*i %**	***Hi***	***mi.fi***	**$(mi)^2.fi$**
Deficiente	00-10	5	9	9	29	29	45	225
Suficiente	11-14	12,5	10	19	32	61	125	1562,5
Satisfactorio	15-17	16	11	30	36	97	176	2816
Excelente	18-20	19	1	31	3	100	19	361
Σ			31		100		356	4964,5

FUENTE: Prueba de proceso N° 1: Arcos orientados y función envolvente (Anexo 7-a)

Las puntuaciones obtenidas en la segunda prueba, resumidas en la **tabla N° 14**, de los 31 estudiantes de 5° "D" presentados en cuatro intervalos de amplitudes distintas (con escalas de valoración), el 45,16% de de los alumnos tienen notas de 11 a 14 (rendimiento suficiente), 9 estudiantes que representan al 29% del total tienen notas de 15 a 17 (rendimiento satisfactorio) y mientras 7 alumnos que representan al 22,58% tienen rendimiento deficiente. Sólo un alumno que representa el 3,23% de los alumnos tiene rendimiento excelente. Asimismo, el promedio de notas de los alumnos es 373/31 = 12,03 desviación estándar 4,18 y coeficiente de variación 34,77%. Según relata la tabla los calificativos de la mayoría de los estudiantes (74,19%) fluctúan de 11 a 17.

Tabla N° 14: Resultados obtenidos en la prueba de la unidad 2 del módulo didáctico grupo experimental.

ESCALA VALORATIVA	**Notas** **[L_i - L_s]**	m_i	.f_i	***F*i**	***h*i %**	***Hi***	***mi.fi***	**$(mi)^2.fi$**
Deficiente	00-10	5	7	7	22,58	22,58	35	75
Suficiente	11-14	12,5	14	21	45,16	67,74	175	2187,5
Satisfactorio	15-17	16	9	30	29,03	96,75	144	2304
Excelente	18-20	19	1	31	3,23	100	19	361
Σ			31		100,00		373	5027,5

FUENTE: Prueba de proceso N° 2: Ángulos y arcos orientados (Anexo 7-b)

En la **Tabla N° 15**: se observa que la mayoría de los alumnos (14) que representan al 45,16% del total de alumnos del grupo experimental tienen notas de 15 a 17 (rendimiento satisfactorio), mientras que 13 que corresponde al 41,94% de los alumnos tienen notas de 11 a 14 (rendimiento suficiente), y sólo 2 estudiantes que representan el 6% del total tienen rendimiento deficiente y excelente, respectivamente. El promedio de notas de los alumnos es 434,5/31 = 14, desviación estándar 3,1 y coeficiente de variación 22%.

TABLA N° 15: Resultados obtenidos en la prueba de la unidad 3 del módulo didáctico grupo experimental.

ESCALA VALORATIVA	**Notas** **[L_i - L_s]**	m_i	f_i	***F*i**	**.*h*i %**	***Hi***	***mi.fi***	**$(mi)^2.fi$**
Deficiente	00-10	5	2	2	6,45	6,45	10	50
Suficiente	11-14	12,5	13	15	41,94	48,39	162,5	2031,25
Satisfactorio	15-17	16	14	29	45,16	93,55	224	3584
Excelente	18-20	19	2	31	6,45	100	38	722
Σ			31		100		434,5	6387,25

FUENTE: Prueba de proceso N° 3: Funciones Trigonométricas (Anexo 7-c)

En la **Tabla N° 16** se observa que 15 alumnos que representan al 48,39% tienen notas de 15 a 17 (rendimiento satisfactorio), seguido de las notas de 11 a 14 que incluyen a 10 (32,26%) de los alumnos (rendimiento suficiente), 1 alumno que representa al 3,22% tienen rendimiento deficiente, y mientras que 5 alumnos que representan al 16,13% tiene rendimiento excelente. Por otro lado, el promedio de notas de los alumnos es 465/31=15, desviación estándar 2,8 y coeficiente de variación 19,2%, datos que muestran el incremento sostenido con tendencia ascendente de los calificativos.

TABLA N° 16: Resultados obtenidos en la prueba de la unidad 4 del módulo didáctico grupo experimental.

ESCALA VALORATIVA	Notas [L_i - L_s]	.m_i	.f_i	F_i	.*h*i %	***Hi***	***mi.fi***	**$(mi)^2.fi$**
Deficiente	00-10	5	1	1	3,22	3,22	5	25
Suficiente	11-14	12,5	10	11	32,26	35,48	125	1562,5
Satisfactorio	15-17	16	15	26	48,39	83,87	240	3840
Excelente	18-20	19	5	31	16,13	100	95	1805
Σ			31		100		465	7232,5

FUENTE: Prueba de proceso N° 4: Funciones trigonométricas inversas (Anexo 7-d).

Según se observa en la tabla N° 17: se observa que 16 alumnos que representan al 52% del total tienen notas de 15 a 17 (rendimiento satisfactorio), mientras que 6 (19%) tienen notas de 11 a 14, 9 alumnos que representan al 29% tienen notas de 18 a 20 (rendimiento excelente), y sólo 6 (19,0%) tiene notas de 11 a 14, y ninguno tiene calificativo deficiente. El promedio de notas de los alumnos es 502/31 = 16,2, desviación estándar 2,18 y coeficiente de variación 13,44%.

TABLA N° 17: Resultados obtenidos en la prueba de la unidad 5 del módulo didáctico grupo experimental.

ESCALA VALORATIVA	Notas [L_i - L_s]	.m_i	f_i	F_i	.*h*i %	***Hi***	***mi.fi***	**$(mi)^2.fi$**
Deficiente	00-10	5	0	0	0	0	0	0
Suficiente	11-14	12,5	6	6	19	19	75	937,5
Satisfactorio	15-17	16	16	22	52	71	256	4096
Excelente	18-20	19	9	31	29	100	171	3249
Σ			31		100		502	8282,5

FUENTE: Prueba de proceso N° 5: Identidades trigonométricas (Anexo 7-e)

En resumen, los calificativos obtenidos por los alumnos del grupo experimental en las cinco evaluaciones o pruebas de proceso administrados indican una evolución ascendente y sostenida del rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas; pues en la primera prueba la mayoría de los calificativos eran entre deficiente y suficiente, mientras que en la última prueba se ubican en la escala valorativa de satisfactorio a excelente. Es decir con la estrategia de enseñanza personalizada a través de módulos se logran aprendizajes significativos.

1.6. De la post-prueba (Evaluación de salida)

Se administró en la segunda semana del mes de junio del 2005, después de haber concluido el primer trimestre del año escolar y estudiado durante 9 semanas el tema de funciones trigonométricas, en ambos grupos.

OBJETIVO:

1. Conocer el aprendizaje logrado sobre las funciones trigonométricas por los alumnos del grupo experimental que estudiaron el tema en forma personalizada a través de módulos a partir de puntos de la circunferencia unitaria, y los alumnos del grupo de control que estudiaron el tema con el procedimiento tradicional.

2. Comparar el nivel de aprendizaje logrado sobre las funciones trigonométricas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control, para deducir la confirmación o no de nuestra hipótesis de trabajo planteado con antelación y luego inferir conclusiones conducentes a la viabilidad del trabajo,

3. Determinar el logro de los objetivos y metas propuestos en el estudio de las funciones trigonométricas en ambos grupos de enseñanza y emitir juicios válidos con miras a optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en el quinto grado de secundaria.

Los ítems de la prueba de salida se elaboraron teniendo en cuenta los cinco niveles del dominio cognoscitivo de la taxonomía de Bloom, tal como se resume en el siguiente cuadro:

Ítems	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11
a)	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	Evaluación
b)	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	Evaluación
c)	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	
d)	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	

La elaboración de los ítems estuvo a cargo del profesor del grupo de control y del grupo experimental (docente investigador), quienes también prepararon el solucionario. La prueba se administró en paralelo en ambos grupos en la quincena del mes de junio, cuyos calificativos se tomaron en cuenta para las notas del primer trimestre, la duración de la prueba fue de dos horas pedagógicas (90 minutos).

La prueba fue controlada y administrada simultáneamente por dos docentes, luego calificado por un tercer docente de la especialidad a quien se le entregó la resolución de los ítems de la prueba de salida aplicada en ambos grupos.

TABLA N° 18: CUADRO RESUMEN DE LA PROBABILIDAD DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS SEGÚN LOS NIVELES DEL DOMINIO COGNITIVO EN LA PRUEBA DE SALIDA.

	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis	Total
Grupo Experimental	0,823	0,714	0,681	0,698	0,667	0,665
Grupo de Control	0,680	0,617	0,641	0,605	0,540	0,547

FUETE: Elaboración Propia (Calificativos en la prueba de salida, anexo N° 8)

Descripción e interpretación de los resultados obtenidos por niveles

1. Los ítems referidos a comprobar el nivel de CONOCIMIENTO: Los alumnos del grupo experimental resolvieron los ítems en forma correcta en un 82,3%; mientras en el grupo control resolvieron correctamente sólo en un 68%, existiendo una diferencia significativa entre los resultados obtenidos en ambos grupos.

2. Los ítems referidos a comprobar el nivel de COMPRENSIÓN: Los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 71,4% de los ítems; mientras en el grupo de control resolvieron correctamente sólo en un 61,7%, siendo la comprensión de los alumnos aceptable a favor del grupo experimental.

3. Los ítems referidos al nivel de APLICACIÓN: Los alumnos del grupo experimental desarrollaron en forma correcta en un 68,1%, mientras en el grupo de control resolvieron correctamente en un 64,1%, se observa que la resolución de ítem referido al nivel de aplicación es superior en el grupo experimental.

4. Los ítems referidos al nivel de ANÁLISIS: Los alumnos del grupo experimental resolvieron correctamente 69,8%; mientras en el grupo control resolvieron en forma correcta sólo en un 60,5%, ratificándose una diferencia significativa entre los resultados obtenidos en ambos grupos.

5. Los ítems referidos al nivel de SÍNTESIS: Los alumnos del grupo experimental resolvieron en forma correcta en un 66,7%; mientras en el grupo control resolvieron correctamente sólo en un 54%, siendo inferior porcentualmente en ambos grupos, pero manteniéndose una superioridad significativa a favor del grupo experimental.

En los resultados globales obtenidos por ambos grupos, los alumnos del grupo experimental resolvieron con una efectividad de 66,5%, mientras que el grupo de control resolvió correctamente en un 54,7%. Resultado que nos induce a afirmar en la estrategia metodológica de enseñanza modular personalizada empleada tuvo mejores resultados, expresado a través del rendimiento académico del grupo experimental, que es significativamente superior al grupo de control, como se resume en la siguiente tabla.

TABLA N° 19: RESUMEN DE ESTADÍSTICOS CALCULADOS DE LA PRUEBA DE SALIDAD DEL GRUPO EXPERIMENTAL Y EL GRUPO DE CONTROL

	Quinto Grado “D” (Grupo Experimental)	Quinto Grado “C” (Grupo de Control)
N° de alumnos	31	32
Nota mayor	17	17
Nota menor	10	07
Rango	7	10
Promedio	14,34	12,20
Mediana	15	12,5
Varianza	4,14	4,76
Desviación estándar	2,04	2,18
Coeficiente de variación	14,2%	17,9%

FUENTE: Elaboración propia de resultados de la prueba de salida (anexo N° 8)

Al obtener en forma más detallada los valores de los estadígrafos descriptivos de los puntajes de los grupos control y experimental de ambas pruebas (tabla N° 20), se observa que las medias de los grupos Control Antes (09,66) y experimental antes (09,32) son numéricamente casi iguales y las medianas son idénticos (9,0). Mientras que las medias de los grupos de Control Después (12,20) y Experimental Después (14,34), son numéricamente diferentes, así también son diferentes entre si sus medianas, conforme se resume en la tabla N° 20. Observándose claramente que la Media y la Mediana del Grupo Experimental Después son mayores que la media y mediana del Grupo Control Después en más de dos puntos (2,14) y (2,5) respectivamente.

1.7. Comparación des estadísticos de pre-prueba y post-prueba

TABLA N° 20: CUADRO COMAPRATIVO DE ESTADÍGRAFOS DE LOS GRUPOS EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

GRUPO	MEDIA	MEDIANA	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	COEF. DE VARIACIÓN
Control Pre-prueba	09,66	9	2,778	0,288
Control Post-prueba	12,20	12,5	2,181	0,179
Variación	+2,54	+3,5	–0,597	–0,108
Exper. Pre-prueba	09,32	9	2,914	0,313
Exper. Pre-prueba	14,34	15,0	2,035	0,142
Variación	+5,02	+6,0	–0,879	–0,171

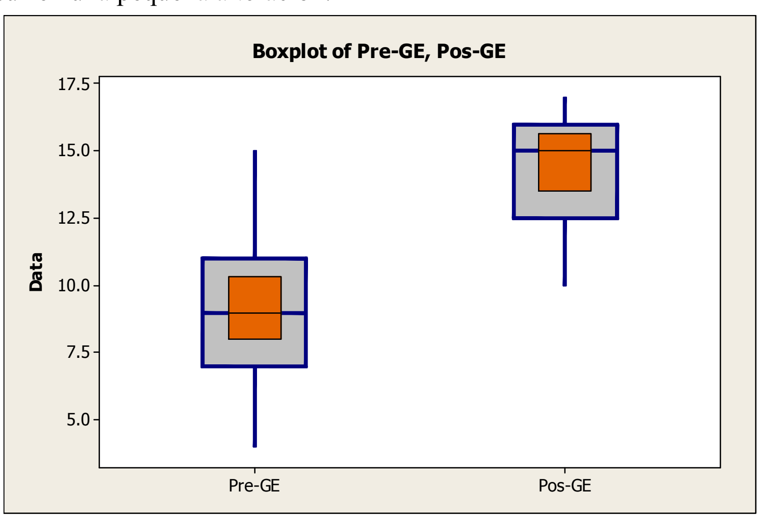
FUENTE: Elaboración propia de resultados de la prueba de requisitos (anexo N° 6 y N° 8)

Como muestra la tabla N° 20, la variación de los estadígrafos de tendencia central de la post-prueba respecto a la pre-pueba el grupo Experimental es muy superior al del grupo de Control, mientras que en los estadígrafos de dispersión han descendido, siendo este descenso más significativo en el grupo Experimental. Estas variaciones nos indican que el rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el grupo Experimental es mejor al del grupo de Control.

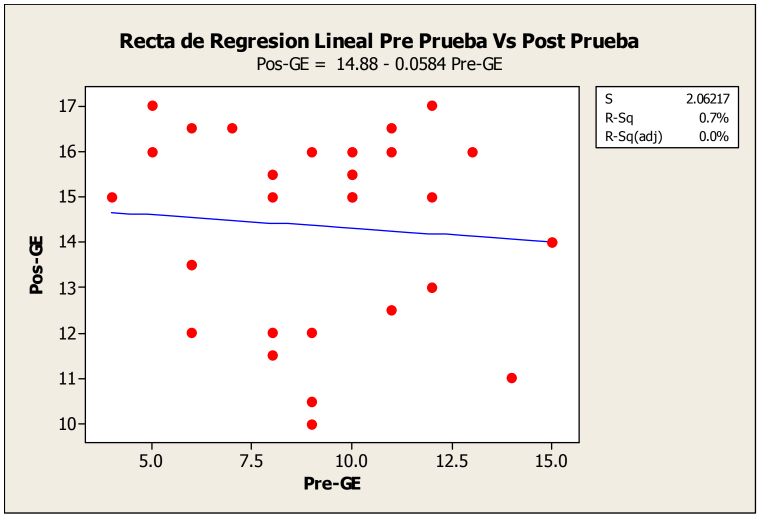
1.8. Asociación de resultados de la pre-prueba y post-prueba en ambos grupos

1.8.1. Grupo Experimental:

La diferencia que existe entre los calificativos obtenidos en la pre-prueba y post-prueba del grupo Experimental ha sido bien marcada, como muestra la gráfica de cajas en donde se observa que la media de la post-prueba es muy superior, mientras que las medidas de dispersión sufren una pequeña alteración.



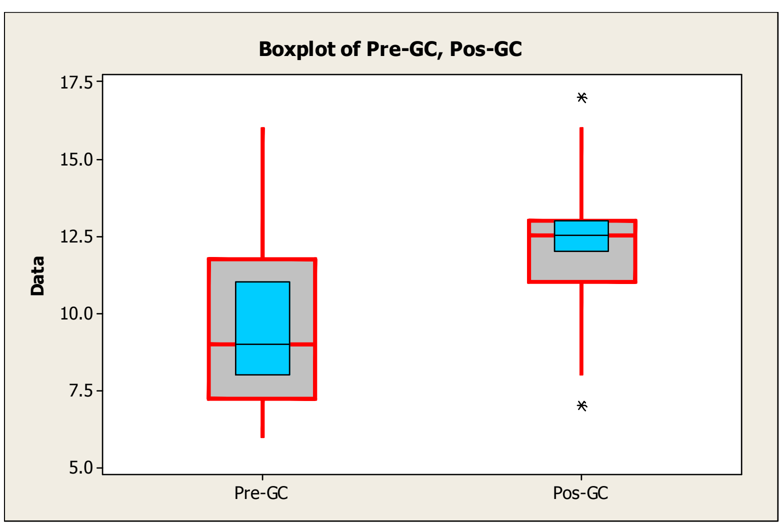
Respecto a la asociación entre los calificativos de ambas pruebas podemos decir que es casi inexistente, pues el coeficiente de correlación (`Pearson correlation of Pre-GE` and Pos-GE = -0.084) indica que la intensidad de relación entre las notas de la pre-prueba y post-prueba es negativa y muy débil.



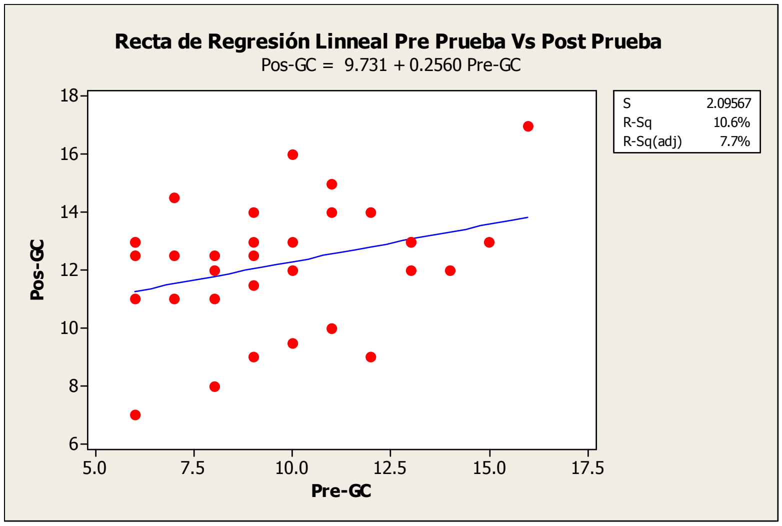
La recta de regresión lineal de ecuación (Pos-GE = 14.88 - 0.0584 Pre-GE) indica que la recta prácticamente no representa un ajuste a los datos de la pre-prueba y post-prueba, debido a que los calificativos han sufrido considerable variación de una prueba ha otra, cumpliéndose de esta forma con lo conjeturado.

1.8.2. Grupo de Control:

La diferencia que existe entre los calificativos obtenidos en la pre-prueba y post-prueba del Grupo de Control tiene una variación no muy marcada, como muestra la gráfica de cajas, donde se observa que la media de la post-prueba es ligeramente superior, mientras que la dispersión de los datos se reducen en forma considerable.



Respecto a la asociación entre los calificativos no ha sufrido una alteración muy grande, pues el coeficiente de correlación (Pearson correlation of Pre-GC and Pos-GC = 0.326) indica que la intensidad de relación entre las notas de la pre-prueba y post-prueba del grupo de Control es positiva y débil con tendencia a moderada.



La recta de regresión lineal de ecuación (`Pos-GC = 9.731 + 0.256 Pre-GC`) indica que la recta tiene pendiente positiva y se relaciona moderadamente a la pre-prueba y post-prueba, pues los calificativos no han sufrido una variación muy grande, cumpliéndose con lo conjeturado respecto al grupo de control.

2. PROCESO DE PRUEBA DE HIPÓTESIS

Procedimiento de la prueba de hipótesis

Teniendo en cuenta los pasos propuestas de (Mason/Lind/Marchal, 2001, p.311) y Daniel (1995) tomamos un procedimiento consistente en 6 pasos, para tomar la "*decisión de rechazar o no la hipótesis*", siendo estos pasos los siguientes:

Paso 1. Planteo de la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1): El primer paso del procedimiento es el tratamiento de hipótesis, ya que "*para someter a contraste una hipótesis es necesario, además de formular la hipótesis alternativa (H_1), formular la hipótesis nula (H_0) que viene ha ser la negación de la alternativa. Es importante realizar este artificio debido a que es la única manera de probar la hipótesis*". Desde esta perspectiva en la presente investigación formulamos:

Hipótesis Nula (H_o):

El rendimiento académico promedio de los alumnos que desarrollan el tema de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas con uso del módulos didácticos en forma personalizada (μ_2), **es menor o igual** que el rendimiento académico de los alumnos que estudian el tema en forma tradicional y sin uso del módulo (μ_4), en el quinto grado de educación secundaria.

Expresado formalmente está dado por: $\mathbf{H_o : \mu_2 \leq \mu_4}$.

Hipótesis Alternativa (H_1):

El rendimiento académico promedio de los alumnos que desarrollan el tema de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el sistema de coordenadas cartesianas con uso de módulos didácticos en forma personalizada (μ_2), **es significativamente mayor** al rendimiento académico de los alumnos que estudian el tema en forma tradicional y sin uso de módulos (μ_4), en el quinto grado de educación secundaria.

Expresado formalmente está dado por: $\mathbf{H_1 : \mu_2 > \mu_4}$.

Paso 2. Especificación del nivel de significación: Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, a esto se le llama error de tipo 1, algunos autores utilizan nivel de riesgo en vez de nivel de significación, y se denota con la letra griega alfa (α). "*Tradicionalmente se utiliza nivel de significación de 0,05 para investigaciones sobre consumo o uso de servicios, el de 0,01 para el aseguramiento de calidad y precisión, y el de 0,10 para encuestas políticas*". Para efectos de la presente investigación se ha determinado: $\alpha = 0{,}05$.

Paso 3: Selección del estadístico de prueba: Un estadístico de prueba es una cantidad numérica que se calcula a partir de los datos de una muestra y que se utiliza para tomar una decisión de rechazar o no la hipótesis nula David (1995). Como la varianza poblacional es desconocida y las muestras son pequeñas (n_2 y n_4 casi iguales a 30) e independientes, el estadístico de prueba elegida es la T de Student, cuyo valor se calcula a través de $t_C = \dfrac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_4) - (\mu_2 - \mu_4)}{\sqrt{S_C^2\left(\dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_4}\right)}}$, donde: $\bar{y}_2$, es la media del grupo experimental; $\bar{y}_4$, es la media del grupo de control; $S_C^2 = \dfrac{(n_2 - 1)s_2^2 + (n_4 - 1)s_4^2}{n_2 + n_4 - 2}$ es la varianza combinada de las dos muestras, S_2^2 y s_4^2 son las estimaciones de varianzas muestrales de tamaños n_2 y n_4, cuya distribución se considera aproximadamente normal N(0 , 1).

Paso 4: Regla de decisión: Una regla de decisión es un enunciado de las condiciones según el cual se acepta o rechaza la hipótesis nula, para el cual es imprescindible determinar el valor crítico, que es un número que divide la región de aceptación y la región de rechazo. Así para $\alpha = 0{,}05$ y una prueba unilateral de cola a la derecha para la distribución T, teniendo en cuenta $t_{1-\alpha, n_2+n_4-2} = t_{0{,}95;61}$, la de rechazo de la hipótesis nula es: R.C. = $\{T > 1{,}671\}$.

<u>Paso 5:</u> Cálculo del valor del estadístico de prueba: Con los datos que se resume en la tabla N° 21, se procede a calcular el estadístico de prueba o *T* calculada.

TABLA Nº 21

Grupos	$.n$	$\bar{y}$	S^2
Grupo Experimental	$n_2 = 31$	14,34	$S_2^2 = 4{,}14$
Grupo de Control	$n_4 = 32$	12,20	$S_4^2 = 4{,}76$

FUENTE: Elaboración propia (datos extraídos de la tabla N° 20)

Realizando las operaciones correspondientes con los valores de la tabla, calculamos la varianza combinada: $S_c^2 = \dfrac{(n_2-1)s_2^2+(n_4-1)s_4^2}{n_2+n_4-2} = \dfrac{30(4{,}14)+31(4{,}76)}{31+32-2} = \dfrac{271{,}76}{61} \approx 4{,}46$

Luego, el estadístico de prueba se obtiene mediante:

$$t_k = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_4}{\sqrt{S_c^2 . \left(\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{n_4}\right)}} = \frac{14{,}34-12{,}20}{\sqrt{0{,}283}} = \frac{2{,}14}{0{,}532} \approx 4{,}0226 \quad (T \text{ calculada})$$

<u>Paso 6:</u> Toma de decisión: Se compara el valor real calculado del estadístico de prueba con el valor crítico de éste. Si el valor calculado está en la región de rechazo, entonces se rechaza H_0, de lo contrario, no se rechaza, con los datos que se presenta en la tabla del paso anterior.

Donde el valor de *T* calculado es: $t_k = 4{,}023 > 1{,}671$ (ó $t_k = 4{,}023 \in$ R.C.), se rechaza la hipótesis nula H_o y se acepta la hipótesis alternativa H_1. La misma que indica que el rendimiento académico de los alumnos que estudian la trigonometría en forma personalizada mediante módulos didácticos es significativamente superior a los lo hacen con el procedimiento tradicional y sin uso de módulos.

4. DISCUSIÓN E INTEPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para poder interpretar en forma adecuada y precisa los resultados obtenidos en la investigación, se tiene en cuenta en primer lugar los datos obtenidos en la prueba de requisitos, antes de la implementación de la enseñanza personalizada a través del módulo didáctico; donde las dificultades encontradas fueron fuente de reflexión para realizar un proceso de realimentación y así ingresar al tema de estudio en el proceso experimental.

Conforme se verificó en la sección de presentación y análisis de datos, muchos hallazgos que conducen a la confirmación y logro de los objetivos formulados con antelación, puesto que los resultados (calificativos) obtenidos en la prueba de salida, en el grupo experimental fue significativamente superior que los calificativos del grupo control. Este resultado no es casual, sino fruto del trabajo consciente y consistente realizado por el docente en la enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados en la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, que tiene validez interna y externa.

Validez Interna: El trabajo de investigación es válido internamente porque los resultados obtenidos están fuera de sesgo, debido a que hubo un control efectivo de las fuentes de error experimental y de otras variables exógenas, lo cual ha contribuido a una mayor validez interna del proceso experimental, hecho que condujo a que:

- El rendimiento académico de los alumnos, que llevaron el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de matemática aplicando la estrategia de enseñanza modular personalizada, muestra una mejora significativa en el aprendizaje de los alumnos en los niveles de: conocimiento, comprensión, análisis, síntesis y aplicación, de tópicos sobre las funciones trigonométricas.
- Los puntajes obtenidos por los 31 alumnos del grupo experimental en los ítems correspondientes al nivel de: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis y síntesis son: 102, 89, 84,5, 86 y 83, respectivamente. Mientras los puntajes de los 32 alumnos del grupo de control en los ítems de los mismos niveles son: 87, 75, 78,5, 70,5 y 67, respectivamente. Como se puede observar los puntajes obtenidos por el grupo experimental es superior a los puntajes del grupo de control en los cinco niveles considerados.
- El promedio de los calificativos del grupo experimental resulta 14,34 y el promedio de calificativos del grupo control es 12,20; y, la aplicación de la prueba de hipótesis estadística por diferencia de medias ratifica nuestra hipótesis de trabajo, al aceptarse la hipótesis alternativa.
- La mediana del Grupo Experimental es 15 y del Grupo de Control 12,5; ello significa que en el grupo de control la mitad de los alumnos tienen notas menores a 12,5 y el resto mayores a esta cantidad; mientras que el grupo experimental el 50% tienen notas menores o iguales a 15 y el resto mayores que 15.

- La varianza del Grupo Experimental es 4,14 y del Grupo de Control 4,76; ello significa que en el grupo de control existe mayor dispersión de datos (calificativos) respecto a la media aritmética, que en el grupo experimental.
- El coeficiente de variación del grupo experimental es de 14,2% y el del grupo de control es del 17,9%; lo que significa que los calificativos del grupo experimental son más homogéneos o tiene menor variabilidad que los calificativos obtenidos en el grupo de control; y podemos inferir que con la enseñanza personalizada a través del Módulo Didáctico se logran aprendizajes más significativos que en forma tradicional.
- Las dificultades en el aprendizaje de la matemática y el bajo rendimiento académico en los alumnos del nivel secundario es un problema latente de nuestra realidad regional y nacional, pero muchos docentes se han dedicado sólo a describirlos a un nivel de diagnóstico, pero lo que cuenta en las circunstancia actuales es diseñar e implementar medios y materiales, así como estrategias didácticas con miras a mejorar cualitativa y cuantitativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática; como es la finalidad de este modesto trabajo.
- La investigación realizada y los resultados logrados se enmarcan dentro de una perspectiva teórica, metodológica y didáctica tendiente a dinamizar el aprendizaje de la Matemática, que se ha materializado con el diseño y ejecución de un programa de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano en el quinto grado de educación secundaria. A diferencia de otros trabajos como los mencionados en el párrafo anterior, se desarrolla en forma rigurosa el contenido temático para asimilación significativa de los conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas.
- Otra particularidad de la investigación es que tuvo en cuenta las teorías de Piaget y Vigostky para su fundamentación, la teoría y características de la educación personalizada propuesta por García Hoz para implementar la estrategia didáctica; los principios de diseño de instrucción para la elaboración de los módulos didácticos, y las taxonomías de los objetivos educacionales de Bloom y las teorías del proceso cognitivo para el proceso de elaboración de los ítems de las pruebas

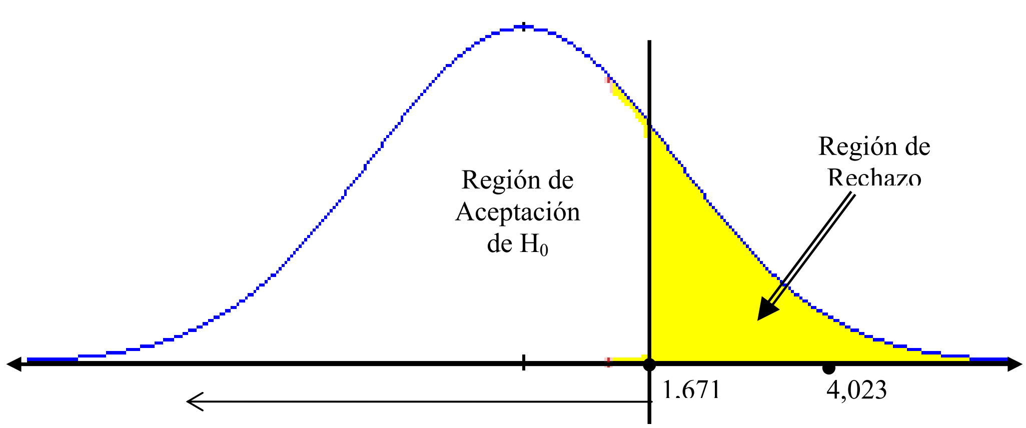
aplicadas en el proceso de experimentación. Lo cual, muestra la viabilidad teórica, metodológica y práctica de la presente investigación.

Validez Externa: Por la *aleatorización en bloques completos* en la selección del grupo experimental y de control, los resultados obtenidos en la investigación, es replicable y generalizable a la población total, a otros temas de la asignatura de matemática del quinto grado de secundaria, en otros grados de estudio. Asimismo, la validez de nuestra investigación se puede proyectar a todas las Instituciones Educativas que guarden cierta similitud con la institución educativa donde se hizo el estudio experimental de la propuesta, la región Huánuco

4. ADOPCIÓN DE DECISIONES

Considerando los estadígrafos ya calculados se toma la decisión de rechazar o no la hipótesis nula, a partir de los datos que se presenta en la tabla. Los resultados obtenidos con la presente investigación son confiables y útiles, pues evidencian la validez de nuestro experimento, que muestra una diferencia estadísticamente significativa entre los estadígrafos de tendencia central y de variabilidad obtenidos a partir de los grupos Experimental y de Control. La misma que ha sido sometido a una prueba de hipótesis al 95% de confianza mediante la distribución *T* de Student. Donde el valor de *T* calculado, 4,023, es mayor que 1,671 (es decir como 4,023 cae en la región de rechazo), es decir se rechaza la hipótesis nula H_0. Asimismo, la diferencia de medias en la prueba de salida entre el Grupo de Control y del Grupo Experimental es (2,14), la misma que cae también en la región de rechazo. Asimismo

Esta decisión se puede graficar del siguiente modo:



Como rechazamos H_0 debido a que el valor de T calculado cae fuera del área de influencia de H_0, concluimos que H_1 es verdadera, es decir: El rendimiento académico de los alumnos que desarrollan el tema de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano a través de la enseñanza personalizada mediante el módulo didáctico (Y_2), **es significativamente mayor** al rendimiento académico de los alumnos que estudian el tema en forma tradicional y sin uso de módulos (Y_4), en el quinto grado de educación secundaria.

Tales resultados obtenidos permiten inferir que la enseñanza personalizada mediante el módulo didáctico produce un aprendizaje significativo. En comparación con el tipo de tratamiento del grupo control consistente casi en su totalidad con la enseñanza expositiva durante las primeras nueve semanas de clases. Mientras en el grupo experimental se considera una situación inicial, de proceso y posterior con la utilización de módulo didáctico durante nueve semanas consecutivas que dura el trabajo de campo.

Cuando diferenciamos el aprendizaje de conceptos, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas logrados por los alumnos después del proceso experimental existe una diferencia significativa entre las medias en (2,14). Diferencia que nos muestra que el tratamiento aplicado en el grupo experimental es más efectivo que la enseñanza tradicional. Debido a que el módulo didáctico motiva el estudio de la matemática dentro o fuera del aula ya sea en forma individual y/o grupal.

Finalmente, cabe señala que la estrategia de enseñanza personalizada mediante módulo didáctico se requiere un compromiso, mucha voluntad y preparación del docente, así como la colaboración permanente de los alumnos para la consecución de los objetivos propuestos. Para plasmar ello, se tuvo que concienciar y motivar a los alumnos, lográndose de esta manera un aprendizaje esperado de las funciones trigonométricas, en beneficio de los alumnos y por nuestra satisfacción personal y profesional.

CONCLUSIONES

1. El nivel de conocimiento de los requisitos para abordar el estudio de las funciones trigonométricas de los alumnos del quinto grado de secundaria es deficiente, pues, al administrar una prueba de requisitos antes de la aplicación de la estrategia de la enseñanza personalizada a través de módulos didácticos más del 70% de los evaluados tuvieron notas desaprobatorios en el sistema vigesimal. Es decir, tienen escaso conocimiento de los temas que se requiere para estudiar la trigonometría.

2. Los bajos calificativos obtenidos en la prueba de requisitos se explica la falta de compromiso entre los elementos que participan en el proceso (docente y alumnos), alumnos poco habituados al uso del plano cartesiano, escasa habilidad para relacionar los conceptos de funciones reales y la geometría elemental, requisito indispensable para el estudio de las funciones trigonométricas circulares.

3. El uso de módulos didácticos para el estudio de las Funciones Trigonométricas con procedimientos didácticos y metodológicos adecuados a la enseñanza personalizada, permite tener una visión integral del proceso de aprendizaje de los alumnos y conduce a la adquisición de aprendizajes significativos y a mejorar el rendimiento académico, respecto de quienes abordaron el tema en forma pasiva, sólo con la exposición del profesor y participación casi nula del alumno en clase, como se constató durante el trabajo de campo.

4. Los alumnos que llevan a cabo el proceso de aprendizaje en forma personalizada con módulos didácticos (grupo experimental) muestran mayor motivación y predisposición para el estudio y aprendizaje de los temas desarrollados conducentes al logro de los objetivos propuestos a diferencia de los alumnos del grupo de control, las mismas, que se expresan en las actitudes que muestran para el aprendizaje (encuesta), y en los resultados de las evaluaciones de proceso y de salida.

5. La estrategia de enseñanza personalizada posibilita un trabajo consciente, responsable, con libertad y autonomía del alumno, tanto individual como grupal, estimulando un aprendizaje eficaz, eficiente y efectivo de la Matemática tanto en su aspecto formativo, funcional e instrumental. Donde el maestro tiene la misión de motivar y orientar el aprendizaje en clase; asimismo, la relación profesor-alumno, alumno-alumno sufren cambios significativos, que se manifiestan en el cambio de actitud y los hábitos de estudio desarrollados en los alumnos del grupo experimental.

6. La enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas con módulos didácticos a partir de los puntos en la circunferencia unitaria en el plano cartesiano es un proceso activo por excelencia, por la continua y sistémica participación de los alumnos en el proceso de su aprendizaje, donde el docente facilita y motiva el aprendizaje de los alumnos, produciendo aprendizajes significativos; frente a la enseñanza tradicional (método pasivo) llevado a cabo en base a la exposición del profesor, sin uso de material educativo elaborado por el docente, ni módulo didáctico.

7. El estudio de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano tiene la ventaja de: trabajar con los puntos que le pertenecen, identificar su esencia periódica, deducir las relaciones e identidades trigonométricas, trazar sus gráficos e identificar sus propiedades, introduciendo al estudiante en los fundamentos de las matemáticas superiores y tomando las relaciones entre elementos del triángulo como una aplicación particular.

8. Al concluir la enseñanza personalizada a través de módulos didácticos se constató en la prueba de salida que existen diferencias estadísticamente significativas "*por diferencia de medias*", entre el grupo experimental y el grupo de control en el nivel de aprendizaje de las funciones trigonométricas. Siendo el rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas significativamente superior en el grupo experimental, para un nivel de significación de 0,05.

SUGERENCIAS

1. Cuando se enseña las funciones trigonométricas en el quinto grado se debe tener en cuenta los requisitos que requiere el alumno para una mejor comprensión de los tópicos que se desarrolle.

2. Para una mejor comprensión de las funciones trigonométricas se deben desarrollar en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (plano cartesiano), partiendo de los puntos de la circunferencia unitaria, proceso que simplifica la enseñanza y conduce al logro de aprendizajes significativos sobre el tema.

3. Replicar la presente investigación (enseñanza personalizada modular) en otras muestras y poblaciones, así como en otras asignaturas, posibilitando comparaciones cualitativas y cuantitativas, para ratificar o reforzar nuestras conclusiones fundamentales.

4. Propiciar el desarrollo de módulos didácticos como los elaborados para esta investigación, en temas diversos para reforzar el aprendizaje de los diversos tópicos de la Matemática, en el nivel secundario y en otros niveles educativos.

5. Realizar una preparación o capacitación mediante un ensayo o prueba de la estrategia de enseñanza con otros grupos de estudiantes, con el propósito de detectar algunas debilidades, para hacer un proceso de retroalimentación, superarlos y mejorarlos para generalizar su aplicabilidad a otros niveles educativos.

6. Propiciar los criterios de razonamiento y demostración, simbolización, interpretación gráfica, y resolución de problemas como parte de las capacidades a desarrollar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, con miras a optimizar el aprendizaje de los alumnos.

7. Implementar el uso de las herramientas tecnológicas de actualidad: Calculadoras y software matemáticos, en la resolución de problemas referidos a funciones trigonométricas y otros tópicos de la Matemática en el nivel secundario.

8. Realizar investigaciones referidas a la correlación que pueda existir entre el método de enseñanza modular personalizada, con el nivel de ansiedad, con el desarrollo de inteligencia emocional, con el desarrollo del coeficiente intelectual, con las TICs, etc., en los diferentes niveles educativos.

9. Sugerir a las autoridades e instituciones educativas dar apoyo e incentivos a los docentes que propicien innovaciones en la enseñanza; tales como la elaboración y uso de módulos didácticos con miras a lograr resultados eficaces en su labor docente.

BIBLIOGRAFÍA

A. Fuentes impresas

1. ACH, Vernon & ELY, Donald (1979) ***Tecnología Didáctica***. Buenos Aires: Editorial Paidos.

2. ARY, Donald & CHESER, Lucy (1989) ***Introducción a la investigación pedagógica***. México: McGRAW-Hill Interamericana S.A.

3. AUSUBEL, David, NOVAK, Joseph & HANESIAN, Helen (1992) ***Psicología Educativa***. México: Trillas.

4. BLOOM, Benjamín, (1990) ***Taxonomía de los objetivos de la Educación***. Buenos Aires: Editorial Ateneo.

5. BOYER, Karl *(1968)* ***Historia de la Matemática***. Madrid: Alianza Editorial.

6. CASANOVA, Antonia (1999) ***Manual de evaluación educativa***. México: Editorial la Muralla, S.A.

7. CASTELNUEVO, Enma (1990) ***Didáctica de la Matemática Moderna***. México: Trillas.

8. COHEN, Louis (2002) ***Métodos de investigación educativa***. Madrid: La Muralla.

9. COLL, César & Otros (1999) ***El constructivismo en el aula***. Madrid: Editorial Graó, de ERIF, S..L.

10. Conselho Nacional de Profesores de Matemática (1970) ***La Revolución de las Matemáticas Escolares***. Washington: OEA.

11. CÓRDOVA, Manuel (1999) ***Estadística Inferencial***. Lima: Moshera S.A.

12. CÓRNEJO, Magdalena (1993) ***Modulo Didáctico: La Educación Infantil en el Medio Rural***. Andalucía: Instituto andaluz de evaluación y formación del profesorado

13. DANIEL, Wayne (1995) ***Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación***. Bogotá: McGraw-Hill Latinoamericana.

14. DAVIS, R. y Otros (1983) ***Diseño de Sistemas de Aprendizaje***. México: Trillas.

15. DE GUZMAN, M. & GIL, D. (1993) ***Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones***. Madrid: Editorial popular, S.A.

16. DEL CARMEN, Luis, (1996): ***Análisis y secuenciación de los Contenidos Educativos***, ICE-HORSORI, Universitat de Barcelona, Primera Edición.

17. DELGADO SANTA GADEA, Kenneth (2004) ***Evaluación y calidad de la educación***. Lima: Derrama Magisterial.

18. DELGADO SANTA GADEA, Kenneth (1991) ***Para aprender un “shock” auto-educación grupal y aprendizaje productivo***. Lima: Cultura y vida.

19. DELMO, Stela (1986) ***Como estructurar los contenidos de aprendizaje en los materiales escritos. Educación Hoy.*** Bogotá: CIEC, Año XVI, Nº 95, Octubre-diciembre, 79–80.

20. DOMÍNGUEZ, Zélia (1977) ***Módulos para medir y evaluar en educación***. Madrid: Marcea, SA de ediciones.

21. ESCANO, José (1997) ¿***Cómo se enseña y cómo se aprende***? Barcelona: Ice-Horsori.

22. ETAYO, J. & GARCÍA, J. (1995) ***La enseñanza de las matemáticas en educación secundaria. Tratado de educación personalizada***. Madrid: Rialp, S.A.

23. FERRANDEZ, A. (1979) ***La Educación constantes y problema actual***. Barcelona: SEAC.

24. FIGUEROA, Orlando (1974) ***Aprender a aprender***. Lima: Instituto de estudios peruanos.

25. FOX, David (1981) ***El proceso de investigación en educación***. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra S.A.

26. GAGNÉ, Robert (1976) ***La planificación de la enseñanza: sus principios***. México, D.F.: Trillas.

27. GAGNÉ, Robert (1975) ***Principios básicos del aprendizaje para la instrucción***. México, D.F.: Diana.

28. GARCÍA HOZ, Víctor (1994) ***Problemas y métodos de investigación en la educación personalizada. Tratado de educación personalizada***. Madrid: Rialp, S.A.

29. GARCÍA HOZ, Víctor (1996) ***La educación personalizada en la universidad***. Madrid: Rialp, S.A.

30. GARCÍA HOZ, Víctor (1995) ***La personalización educativa en la sociedad informatizada***. Madrid: Rialp, S.A.

31. GARDNER, H. (1995) ***Inteligencias múltiples****: La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós.

32. GIMÉNEZ, Joaquín (1997) ***Evaluación en matemáticas una integración de perspectivas***. Madrid: Síntesis S.A.

33. GOLEMAN, D. (1996): ***Inteligencia Emocional***. Barcelona: Kairós.

34. GOMEZ, Pedro (1996) ***La Problemática de las Matemáticas Escolares***. Bogotá: Iberoamericana.

35. GOMEZ BUENDIA, Hernando (1998) ***Educación la agenda del Siglo XXI. Hacia un desarrollo humano. Programa de Naciones Unidas para el desarrollo***. Santa Fé de Bogotá: Tercer Mundo Editores.

36. GOMEZ TICERÁN, Doris y Otros (2006) ***Estadística Descriptiva con soporte del SPSS y MATLAB***. Lima: Centro de Producción Editorial e Imprenta de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

37. GONZALES, Teresa (2000) ***Evaluación y gestión de la calidad educativa***. Málaga: Imagraf.

38. HERNÁNDEZ, R., FERNÁNDEZ, C. & BAPTISTA, P. (2002) ***Metodología de la investigación***. México: Interamericana S.A.

39. HURTADO DE MENDOZA, María de los Ángeles (1980) ***Pruebas de rendimiento académico y objetivos de la instrucción*** (*Manual para la enseñanza efectiva*). México: Editorial Diana.

40. IBERÓN, Francisco (1996) ***En busca del discurso educativo: la escuela, la innovación educativa, el maestro y su formación***. Buenos Aires: Editorial Magisterio del Río de la Plata.

41. INGA, Julia (1985) ***Estudio comparativo entre el sistema de enseñanza convencional y el sistema de instrucción personalizada en curso superior de Psicología***. Revista Psicopedagógica, vol. 3, N° 2, p. 183-195.

42. LLINARES, Salvador (1990) ***Teoría y Práctica en educación Matemática***. Sevilla: Ediciones ALFAR.

43. MAILLO, Adolfo (1971) ***La Enseñanza de las Matemáticas***. Madrid: Aguilar.

44. MASON, R.; LIND, D. & MARCHAL, W. (2001). ***Estadística para Administración y Economía***. México, D.F.: Alfa Omega.

45. MATA GUEVARA, Luis (1994) ***Aprendizaje Significativo como Línea de Investigación***. Maracaibo: Universo.

46. MEJÍA, Elías (2005) ***Metodología de la investigación científica***. Lima: Centro de Producción Editorial e Imprenta de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

47. MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2004) ***Programación Curricular del Quinto Grado de Secundaria***. Lima.

48. NACIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATEMATICS (1992) ***Estándares curriculares y evaluación educativa para la educación matemática*** (NCTM), USA: Federación de profesores de matemática.

49. NICHOLS, E. (1974) ***Trigonometría Moderna***. México: Editorial Continental.

50. OGALDE, Isabel (2003) ***Los materiales didácticos, medios y recursos de apoyo a la docencia***. México D.F.: Trillas.

51. OLIVARES, M. (1979) ***Didáctica de la Matemática Moderna***. Editorial Oasis S.A.

52. ORLICH, Donald (1994) ***Técnicas de enseñanza o modernización en el aprendizaje***. México: Noriega editores.

53. ORTON, Anthony (1990) ***Didáctica de la Matemática. Cuestiones teoría y práctica en el aula***. España: Morata

54. PÉREZ, Rayman & GALLEGO, Rómulo (1995) ***Corrientes constructivistas***. Colombia: Cooperativa editorial Magisterio.

55. PÉREZ DE ZAPATA, Amarilis (1997) ***Seminario internacional de medición de la calidad en educación*** (*Sistemas de evaluación y medición de la calidad de la educación*). Piura-Lima-Cusco: Ministerio de Educación.

56. PIAGET, J.; CHOQUET, G. & DIEUDONNE, J. (1986) ***La enseñanza de las matemáticas modernas.*** Madrid: Alianza Editorial.

57. PIAGET, Jean (1999) ***Psicología de la inteligencia***. Madrid: Psique

58. POLYA, George. (1972) ***Cómo plantear y resolver problemas***. México: Trillas S.A.

59. POOLE, B. (2001) ***Tecnología Educativa: educar para la socio cultura de la comunicación y del conocimiento***. Bogotá: McGraw-hill.

60. QUEZADA, Rocío (2004) ***Cómo planear la enseñanza estratégica***. México, D.F.: Limusa SA de C.V..

61. RODRIGUEZ, M. (1988) ***Investigación científica: Teorías y Métodos***. Lima: Editorial Atusparia.

62. SAÉNZ, Jorge (1985) *Vectores**, Geometría y Trigonometría**.* Lima: PUCP.

63. SANTALÓ, Luis. & LLINARES, Salvador. (1994) ***La enseñanza de las matemáticas en la educación Intermedia. Tratado de educación personalizada***. Madrid: Rialp, S.A.

64. SCHOOL MATHEMATICS STUDY GOUP (1965) ***Matemática para la Escuela Secundaria. Funciones Elementales.*** Washington: organización de los Estados Americanos.

65. SCHROEDER, Joachim (1999) ***Lineamientos para la investigación educativa en el área de la Matemática.*** Lima: Ministerio de Educación.

66. SWOKOWSKI, Earl (1992) ***Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica***. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

67. VALIENTE, Santiago (2000) ***Didáctica de la matemática.*** *El libro de recursos*. Madrid: La muralla, S.A.

68. VILLALOBOS, Elvia (2002) ***Didáctica integrativa y el proceso de aprendizaje***. México: Trillas, SA de C.V.

69. WAGNER, Eduardo & PERDIGAO DO CARMO, Manfredo (1999) ***Trigonometría y Números Complejos****.* Brasil: IMPA.

70. WEISS, Carol (1999). ***Investigación Evaluativa. Métodos para determinar la eficiencia de los programas de acción****.* México D.F.: Editorial Trillas

71. WENZELBURGER, Elfreiede" (1995) ***V Simposio de Educación en Matemática***. México: Grupo Editorial Iberoamericana

B. Fuentes Electrónicas

1. BOTICARIO, Jesús & GAUDIOSO, Elena (2005) ***Un modelo de enseñanza a distancia personalizado***. [Disponible en www.ia.uned.es/~jgb/publica/conied99.html]. Leído el 05 de noviembre del 2005.

2. CATALANO, Norma (2005). ***Diseño curricular basado en normas de competencia laboral. Centro Interamericano de Investigación y Documentación sobre Formación Profesional***. [Disponible en www.ilo.org/public/spanish/region/ampro/cinterfor/publ/] Leído el 15 de diciembre del 2005.

3. ANDREOLI, Victorio & KROTKI, Ricardo (1998-2000). ***Seminario sobre "Constructivismo" (1999) Conferencia sobre investigaciones en didáctica de la Matemática* (2000)** [Disponible en www.fra.utn.edu.ar/utnnew/dgu/areacapdocente.as]. Leído el 20 de junio del 2005.

4. ARRIETA, Modesto (1998) ***Medios materiales en la enseñanza de la Matemática. Didáctica de la Matemática***. [Disponible en www.vc.ehu.es/deppe/contendios/N5a9.html]. España: EU. Profesorado. Donosita.UPV/EHU.

5. DE GUZMÁN, Miguel (junio del 2001) ***Curso de laboratorio de matemáticas. Sobre matemáticas del nuevo milenio***. *Sobre historia de la matemática. Pensando sobre educación matemática*. [Disponible en www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/html]. España: Propio de Educación Matemáticas. Leído en mayo del 2005.

6. MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2003) *"**Los estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos**"*. [Disponible en www.cnice.mecd.es/resursos2/orientacion/01apoyo/op04.html-25h]. Revisado en mayo del 2005.

7. REY GENICIO, M., LAZARTE, G. & HERNÁNDEZ, C. (sa) ***Problemática de la enseñanza aprendizaje de la Matemática***. [Disponible en www.edumat.com.ar /iii/iiiAbstracs.asp]. III Simposio de Educación Matemática. Argentina: Universidad Nacional de Jujuy. Leído en abril del 2005.

8. RICO, Luis (2000) ***Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas***. [Disponible en http:ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/revistaema/vol1num1/ai-lrico.html]. Colombia: Universidad los Andes. Leído el 04 de octubre el 2005.

9. UNIVERSIDAD SAN ANTONIO DE MURCIA (1999) ***Enseñanza personalizada***. [Disponible en www.ucam.edu/present/mas] Leído en marzo del 2005.

10. VERA, Lamberto (2003) ***Medición y evaluación del aprendizaje***. Tipos de evaluación [Disponible en www. Ponce.inter.edu./cai/reserva/lvera/educ4011.html]. Revisado en junio del 2005.

A N E X O S

Anexo Nº 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DISEÑO	TÉCNICAS	INFORMANTE
¿Cuál es el nivel del rendimiento académico logrado a través de la enseñanza modular-personalizada de las funciones trigonometrías a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano en los alumnos del quinto grado de secundaria?	Comprobar que con la implementación del modelo de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano mejora significativamente el rendimiento académico de los alumnos del quinto grado de secundaria.	Con el desarrollo de la enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos orientados sobre la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, se mejora significativamente el rendimiento de académico de los alumnos del quinto grado de secundaria. .	**V.I** Enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas. Enseñanza tradicional de las funciones trígono métricas. **V.D.** Rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas.	Y_1 X Y_2 Y_3 Z Y_4 Investigación cuasi-experimental con pre-prueba y post-prueba. Comprobación de hipótesis por diferencia de medias.	Fichaje. Entrevistas Encuestas Pruebas orales Pruebas escritas Guías de observación.	Docentes de matemática. Alumnos del quinto grado. Directivos de centros educativos. Personal administrativo.
¿Qué aspectos deben considerase en la elaboración de módulos didácticos para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas, con miras a mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje?	Diseñar y elaborar módulos didácticos para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas, adecuados al aprendizaje individual y grupal, que facilite el aprendizaje de los alumnos y la labor del docente en el aula.	La elaboración de un módulo didáctico para la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas adecuado al estudio individual y grupal, facilita el aprendizaje de los alumnos y la labor del docente en el aula..				
¿Cómo se lleva a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje logrado mediante la implementación de la enseñanza personalizada a través de módulos didácticos de las funciones trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria en el plano cartesiano?	Desarrollar la enseñanza personalizada de las funciones trigonométricas a partir de puntos y arcos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano a través de módulos didácticos, para motivar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos del quinto grado de secundaria.	La aplicación de módulos didácticos durante las sesiones de clase sobre las funciones trigonométricas a partir de los puntos y arcos en una circunferencia unitaria en el plano cartesiano, motiva y facilita el aprendizaje de los alumnos.				
¿Existen diferencias significativas en el rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas entre los alumnos que recibieron la enseñanza personalizada con módulos didácticos, y los alumnos que la estudiaron con el procedimiento tradicional?	Analizar y comparar el nivel del rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas entre los alumnos que desarrollan el tema a través de la enseñanza personalizada con módulos didácticos, y aquellos que desarrollan a través del procedimiento tradicional. .	Existen diferencias significativas del rendimiento académico en el aprendizaje de las funciones trigonométricas entre alumnos que desarrollan el tema a través de la enseñanza personalizada con módulos didácticos, y aquellos que desarrollan a través del procedimiento tradicional.				

Anexo Nº 2

LA ENCUESTA APLICADA A LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA

INSTRUCCIONES: *Estimado profesor, lea cuidadosamente cada una de las siguientes preguntas conteste verazmente, según corresponda. Se le agradece de sobremanera por su colaboración.*

1. Nombre del C.E. donde labora: ....

Condición de trabajo : Nombrado ☐ Contratado ☐

2. Posee usted Título Profesional: SÍ ☐ NO ☐

Su título Profesional lo obtuvo en: ISP ☐ UNIV. ☐ OTRO (especifique) ☐........

3. Años de servicio docente: de 0 a 4 ☐ de 5 a10 ☐ de 11 a 15 ☐ de 16 o más ☐

4. En el desarrollo de las clases de matemática en la secundaria, usted incide más en su:

a) Valor formativo y funcional c) Valor formativo e instrumental

b) Valor funcional e instrumental d) Valor formativo, funcional e instrumental

5. ¿En qué porcentaje usted logra los objetivos y contenidos programados para la enseñanza de la matemática en la educación secundaria durante el año:

a) Del 100% a 95% b) Del 94% al 85% c) Del 84% al 75 % d) Del 75% o menos

6. ¿En qué porcentaje usted asiste en forma puntual a sus actividades académicas en su centro educativo durante el año escolar?

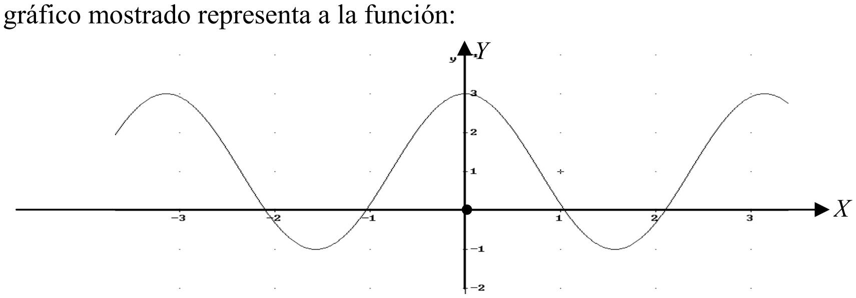
a) Del 100% a 95% b) Del 94% al 85% c) Del 84% al 75 % d) Del 75% o menos

7. Para usted, una función trigonométrica es:

a) Función algebraica c) Función Polinómica

b) Función circular d) La Razón entre los lados de un triángulo rectángulo.

8. El gráfico mostrado representa a la función:



a) $y = \text{sen}(x) + 2$ b) $y = 2\cos(2x) + 1$ c) $y = 2\cos(x) + 1$ d) $y = \cos(x) + 2$

9. ¿Qué dificultades tiene usted cuando enseña el tema de funciones trigonométricas?

a) Horas de clase insuficientes.

b) Falta bibliografía y material didáctico.

c) Los alumnos muestran poco interés por aprender Matemática.

d) Exceso de actividades extra - curriculares.

10. Si usted prepara sus clases de matemática para que dicte la asignatura de matemática en el Quinto Grado de Secundaria ¿Qué bibliografías utiliza?

....
....
....
....

11. ¿Qué textos escolares recomienda usted a sus alumnos para que refuercen los temas del capítulo de trigonometría en el quinto grado de secundaria?

....
....
....
....

12. ¿Ha elaborado usted algún material didáctico o separata para coadyuvar su acción su acción docente con miras a mejorar el aprendizaje de la Matemática de sus alumnos?

SÍ ☐ ¿Cuántas? ☐ ¿Con qué frecuencia?: Mensual Bimestral Semestral Anual
NO ☐ ¿Por qué? ....
....

13. ¿Cuál de los métodos didácticos sueles utilizar con más frecuencia durante el proceso de enseñanza de la Trigonometría?

a) Método expositivo - dialogal c) Método aula laboratorio
b) Método inductivo-deductivo d) Método de estudio dirigido

14. ¿Qué debe predominar en el profesor de matemática para que se logre en su plenitud los objetivos propone lograr?

a) Conocer los contenidos de su curso a nivel elemental y a nivel superior.
b) Manejar diversos procedimientos didácticos y metodológicos.
c) Conocer, diseñar el aprendizaje de acuerdo a la realidad.
d) Reciclarse e innovarse con los avances curriculares y metodológicos.

15. ¿Usted usa calculadoras científicas o recursos informáticos con miras a coadyuvar el aprendizaje de la Matemática de tus alumnos?

a) NO : Por qué: ....
b) SÍ: Por qué: ....
c) En caso de utilizar ¿Qué software matemático utilizas?
....
....
....

Anexo Nº 3

Cuestionario de la Encuesta de valoración del proceso de enseñanza-aprendizaje aplicado a los alumnos del quinto grado (población de estudio).

1. Consideraciones generales sobre el proceso enseñanza-aprendizaje

REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente
a) Calificativo a la enseñanza recibida de funciones trigonométricas				
b) Aprendizaje logrado de temas de trigonometría.				
c) Libro de consulta recomendado por el profesor.				
d) El uso de medios informáticos en la enseñanza-aprendizaje.				
e) Método didáctico del profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje.				

2. Forma de estudiar las funciones trigonométricas.

REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente
a) En forma individual en base a las clases recibidas.				
b) En grupo sólo con ayuda de apuntes de la clase.				
c) En forma individual con ayuda de libros de matemática.				
d) En grupo con ayuda de diversos libros de matemática.				
e) Mediante el auto-estudio.				

3. Validación del área técnico - pedagógico

REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente
a) Motiva y recapitula los contenidos estudiados.				
b) Estimula y mantiene expectativas de aprendizaje.				
c) Uso de medios instrumentales para hacer clases interesantes.				
d) Expresión verbal y comunicación durante la clase.				
e) Utilización de la enseñanza personalizada.				

4. Calificación de cualidades del profesor de matemática.

REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente
a) Conocimiento de los temas que desarrolla en clase.				
b) Manejo de los diversos procedimientos didácticos y metodológicos.				
c) Adecuación de los temas de estudio a la realidad del alumno.				
d) Innovación en los contenidos curriculares y metodológicos.				
e) Conocimiento de los elementos del currículo y métodos activos.				

5. Referido al área académico - docente.

REACTIVOS	Deficiente	Regular	Buena	Excelente
a) Información acerca de los objetivos del tema a desarrollar en clase.				
b) Solvencia y profundidad en el conocimiento de su tema.				
c) Manejo correcto de los términos en clase.				
d) Cumple con el desarrollo del programa establecido.				
e) Manejo de las técnicas e instrumentos de evaluación.				

Anexo Nº 4

ESTIMADO ALUMNO:
Vierta con sinceridad su opinión da cada uno de los aspectos que se te plantean referente a los diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de matemática y de funciones trigonométricas.

1. Aprendizaje logrado sobre trigonometría.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

2. Forma de enseñar del profesor.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

3. Preparación académica del profesor.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

4. Contenido del Módulo Didáctico.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

5. Método utilizado por el profesor.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

6. Motivación para seguir estudios superiores.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

7. Utilidad del Módulo Didáctico.
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

8. Resultados del aprendizaje individual y grupal
   a) Muy buena
   b) Buena
   c) Regular
   d) Deficiente

Anexo Nº 5

LISTA DE COTEJO DEL PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE

PARA EL DOCENTE		
ASPECTOS	APRECIACIÓN	
1. Planificación y preparación de clases.	**SI**	**NO**
Plantea los temas y las fechas de los temas a estudiar.		
Indican los requisitos de los temas a tratar.		
Precisa los objetivos a lograr en el estudio.		
Prevé el uso de medios y materiales didácticos		
2. Proceso de desarrollo de contenidos		
El docente expresa lo fundamental del tema y su problemática		
El docente presta ayuda a algunos puntos no claros		
El docente ayuda y coordina con los alumnos		
Distribuye las tareas en grupos de estudio		
Da normas complementarias para el mejor aprovechamiento		
Acompaña su clase con abundante material didáctico		
Permite participación del alumno a través de preguntas sobre el tema.		
3. Proceso de evaluación y fijación		
El docente propicia la autoevaluación		
El docente actúa como moderador en el proceso de coevaluación		
El docente deja tareas individuales y grupales		
Participa del sistema de evaluación del tema		
Proponen lecturas adicionales de reforzamiento		

PARA EL ALUMNO		
ASPECTOS	APRECIACIÓN	
1.Planificación y preparación de clases.	SI	NO
Participan en la preparación del Módulo Didáctico		
Usan bibliografía adicional al Módulo Didáctico.		
Considera procedimientos de evaluación		
2. Proceso de presentación de contenidos		
Preparan y solucionan adecuadamente las tareas previas		
Sólo escucha las orientaciones y explicación del profesor		
En cada sesión los estudiantes exponen su avance		
Realizan discusiones sobre la resolución de ejercicios		
Con el apoyo del docente plantean y coordinan conclusiones		
Solicitan ayuda al docente para aclarar algunos puntos		
Hacen uso de técnicas de estudio para lograr su aprendizaje		
3. Proceso de evaluación y fijación		
Desarrollan en grupo las tareas planteadas en el módulo		
El representante de cada grupo expone sus resultados		
Participa en la evaluación a sus compañeros		
El representante de cada grupo plantea las dudas del tema		
El docente actúa como moderador		

Anexo Nº 6
PRUEBA DE REQUISITOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones o inecuaciones según el caso

a) $3x + 1 = 7$ c) $x^2 - 5 = 4$

b) $7x + 2 < 5x + 6$ d) $\frac{x+1}{3} \leq 2$

2. Diga, ¿cuáles de los siguientes conjuntos son funciones y cuáles no lo son?

a) $f = \{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 / \ y = x^2 \}$ c) $g = \{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 / y^2 = 3x \}$

b) $h = \{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 = 4 \}$ d) $j = \{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 / x.y = 6 \}$

3. Halle el dominio y el rango de la funciones e ilustre sus respectivos gráficos:

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $h(x) = x^2 - 1$ c) $g(x) = \sqrt{x-2}$ d) $j(x) = \frac{1}{x-1}$

4. De las siguientes funciones reales, ¿cuáles son pares y cuáles son impares?.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ b) $g(x) = = x^2 - 1 \}$ c) $h(x) = \sqrt{x+1}$

5. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas?

a) Si una función es biyectiva, entonces admite inversa:...............................

b) Si una función es creciente, entonces es impar: ....

c) Si una función es periódica si su gráfica es repetitivo: ....

6. Dados los puntos $A = (1 , -2)$, $B = (-3 , 4)$ y $C = (3 , 3)$, encuentre:

a) $d(A , B)$ b) $d(B , C)$ c) $d(A , C)$

7. Complete según usted crea conveniente:

a) El simétrico del punto $(-3 , 5)$ respecto al eje X, es el punto: ______

b) El simétrico del punto $(3 , -4)$ respecto al eje Y, es el punto: ______

c) El simétrico del punto $(-3 , 7)$ respecto al origen, es el punto: ______

8. Dado la función $y = f(x) = \sqrt[3]{2x-3}$ la inversa de f es la función:

a) $g(x) = \frac{x^2+3}{2}$ b) $g(x) = \frac{x+3}{2}$ c) $g(x) = \frac{x^3+3}{2}$

9. a) En un triángulo rectángulo los ángulos agudos miden 30º y 60º, si la medida de la hipotenusa es 6 m. La longitud de los catetos son: ....

b) Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 45º complete los elementos de dicho triángulo: ....

10. De las afirmaciones ¿Cuál es verdadero (**V**) y cuál falso (**F**)?

a) La pareja ordenada $(8 , -4)$ pertenece al conjunto $\{(x , y) / 2y = x^2 \}$..... ( )

b) La pareja ordenada $(-2 , -7)$ corresponde al cuadrante IV...................... ( )

c) $P(0{,}4 , 0{,}6)$ es un punto de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$...................... ( )

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE REQUISITOS DEL GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

GRUPO EXPERIMENTAL 5° "D"			GRUPO DE CONTROL 5° "C"		
ORD	APELLIDOS Y NOMBRES	NOTA	ORD	APELLIDOS Y NOMBRES	NOTA
1	ABAD GARCÍA, Gregorio	6	1	ACOSTA BUSTAMANTE, Armando	8
2	ALVARADO RUEDA, Mayra Paola	12	2	ARBILIO SORIA, Iván	7
3	BENANCIO CISNEROS, Jesús	15	3	ASTUHUAMAN ABAD, Betsabé	13
4	CACHAY CASTIGLIONI, Aldo	11	4	ÁVILA ACERO, Banessa	12
5	ERRIBARREN GAMBOA, Elvis	10	5	CABA TAMAYO, Randú Jesús	15
6	ESPINOZA CAÑOLI, José	5	6	CABELLO MEDRANO, Diofanto	11
7	FELOMENO CARHUAMPMA, María	6	7	CISCEROS FLORES, Luisa	10
8	GABRIEL ARANDA, Verónica	9	8	DAZA CABALLERO, Gladys Clarita	6
9	GUZMÁN PARRA, Alvaro Andy	4	9	DEL ÁGUILA TRUJILLO, Helen	8
10	HUARCAYA HILARES, Liliana	11	10	ESPINOZA LIVIAS, Eleodoro	7
11	JAÚRIGUI LIZAMA, César Manuel	6	11	FERNÁNDEZ ACEVEDO, Vanesa	6
12	LAVADO CAYLLAHUA, Silvia	8	12	FILOMENO CARHUAPOMA, Joselino	8
13	LUCAS GAMERO, Paola Roxana	9	13	GODOY POLIDO, Emily	9
14	MAYER GARCÍA, Glenn	10	14	GONZALES PÉREZ, Julia	9
15	MEJÍA CALDERÓN, Karina Roció	11	15	HERRERA SINTI, Ángela	6
16	MENDOZA VALLE, Doris Yaneth	14	16	HUERTO DE LA CRUZ, Plero	10
17	ORTEGA FLORES, Lizet	8	17	ILLATUPA RIVERA, Nancy Edid	9
18	OSORIO BARZOLA, Verónica	10	18	LIZANA QUISPE, Enrique	12
19	PADILLA OROSCO, Abelardo	9	19	LOZANO SALINAS, Bernardino	16
20	PALOMINO BAYLÓN, Maribel Lida	5	20	MONTENEGRO CRUZ, Verónica	14
21	POZO MEZA, Kalina Mayra	7	21	NAVARRO ROSSELL, Zoila Isabel	13
22	RAMOS CARRIÓN, Robinson	8	22	OSORIO HUAYPA, Alberto	11
23	RIVERA VERDE, Fernando	13	23	PALOMINO FIGUEREDO, Carlos	10
24	ROJAS BARCON, Liz Karina	6	24	PAUCAR VICTOR, Miguel Angel	9
25	SANTA CRUZ LLANOS, lilian Ayda	12	25	PICÓN FERMÍN, Karen Yanet	6
26	SOLSOL ROBLES, maría Magdalena	10	26	SANCHEZ HUAYPA, Leonardo	8
27	TARAZONA MACEDO, Diana	15	27	SANCHEZ MATOS, Lilia Karina	11
28	TELLO SOLÓRZANO, Joyce Amelia	12	28	SOLÍS FLORES, Wilson Marcelo	13
29	TORRES APONTE, Juan Carlos	9	29	TORRES SANTOS, Ivonne	10
30	TUCTO VARA, Mérylin	10	30	URBINA FANO, Yolinda	7
31	VILLANUEVA ELIAS, Manuel	8	31	VELÁSQUEZ CENTENO, Alan	6
			32	ZACARIAS PENADILLO, Wilmer	9
	Puntos	289		Puntos	309
	Promedio	9.323		Promedio	9.656
	Mediana	9.000			9.000
	nota mayor	15		nota mayor	16
	nota menor	4		nota menor	6
	rango	11		rango	10
	Varianza	8.492		Varianza	7.717
	desviación estándar	2.914		desviación estándar	2.778
	coeficiente de variación	0.313		coeficiente de variación	0.288

Anexo Nº 7: EVALUACIONES DE DE PROCESO

PRUEBA DE PROCESO DE LA PRIMERA UNIDAD MODULAR

1. Grafique los recorridos e indique la verdad o falsedad referido

   a) $(A, -3\pi) = (A, 3\pi)$ b) $(A, 7\pi/2) = (A, 2\pi/3)$

   c) $(A, \pi/4) = (A, 9\pi/4)$ d) $(A, \pi/4) = (A, -5\pi/2)$

   4 pts

2. En la $\mathcal{C}_1(O)$ identifique los puntos correspondientes a los siguientes recorridos:

   a) $E(-3\pi/2)$ b) $E(11\pi/3)$

   c) $E(-15\pi/2)$ d) $E(7\pi/4)$.

   4 pts

3. a) ¿Cuál es el período, aproximadamente, del fenómeno llamado orto (salida del sol?

   b) ¿Cuál es el período del cumpleaños de una persona?

   c) Escriba la ecuación de la circunferencia unitaria de radio 2 en posición estándar.

   d) Al dar una vuelta completa ¿qué longitud tiene la trayectoria? ....

   4 pts

4. Represente en la circunferencia $\mathcal{C}_1(O)$ los arcos orientados y efectúe las sumas:

   a) $\pi/2 + (-3\pi)$ = ... b) $3\pi/2 + 7\pi/2$ = ...

   c) $-5\pi/4 + 17\pi/6$ = …… c) $5\pi/4 + 7\pi/4$ = ……….

   4 pts

5. Dado un punto P = $(-3/5, a)$) $\in \mathcal{C}_1(O)$; encuentre el valor de a, siendo P un punto del IV cuadrante. Luego, indique los puntos simétricos respecto al eje abscisas, al eje de las ordenadas y al origen de coordenadas.

   4 pts

PRUEBA DE PROCESO DE LA SEGUNDA UNIDAD MODULAR

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   4 pts

   a) Un radián equivale un ángulo central de 55º.
   b) 4,2 revoluciones equivale a 2 radianes.
   c) La medida de en radianes de todos los ángulos coterminales en el ángulo de $3\pi/7$ radianes es de 75°.
   d) Un ángulo trigonométrico es el ángulo central que subtiende un arco orientado.

2. a) Determine la medida de cada uno de los ángulos en posición normal, si la longitud de la circunferencia es 6π m.

   4 pts

   b) Una circunferencia tiene un radio de 24 cm. Halle la medida en radianes de un ángulo determinado por un arco de longitud 6π cm.

3. a) Determine el valor de la expresión "$a + b$", sabiendo que $a^{o}b' = 12^{o}40' + 9^{o}30'$.
   b) ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo de $-13\pi/4$ radianes?

   4 pts

4. Dibújese ángulos en la posición estándar haciendo que sus lados terminales pasen por los puntos dados abajo. En cada caso, determine la distancia del origen al punto P.

   a) $P(-3, -4)$ b) $P(-2, 5)$
   c) $P(-3, 0)$ d) $P(6, -2)$

   4 pts

5. a) Se ha ideado un nuevo sistema de medida angular denotado por C, donde se cumple: 9C = 10S, siendo S el sistema sexagesimal. ¿A cuánto equivale en el nuevo sistema C, un ángulo de una vuelta y 3/5 de vuelta?

   4 pts

   b) Se ha ideado un nuevo sistema de medida angular denotado por M, donde se cumple: 8M = 9S, siendo S el sistema sexagesimal ¿A cuánto equivale en el nuevo sistema M, un ángulo generado por 11/3 de vuelta?

PRUEBA DE PROCESO DE LA TERCERA UNIDAD MODULAR

1. Si para un arco orientado de medida θ rad, en la $\mathcal{C}_1(O)$, con extremo inicial (1 , 0) y con extremo terminal el punto $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, entonces:

   4 pts

   a) $\cos(\theta)$ = ... b) $\operatorname{sen}(\theta)$ = ...

   c) $\cot(\theta)$ = ………..... d) $\sec(\theta)$ = ...……....

2. Si el punto E(θ) de la circunferencia unitaria es el extremo terminal del arco orientado (A ,θ), está en el segundo cuadrante y $\operatorname{sen}(\theta) = 2/5$, complete las igualdades:

   a) $\tan(\theta)$ = ……..... c) $\cot(\theta)$ = ..……..... 4 pts

   b) $\sec(\theta)$ = ……..... d) $\csc(\theta)$ = ..……....

3. Si para θ en **R** se cumple $\csc(\theta) = -2$, entonces se tiene que:

   a) $\tan(\theta)$ = ... c) $\cot(\theta)$ ....

   b) $\csc(\theta)$ = ... d) E(θ) está en el ....….. cuadrante 4 pts

4. Para las condiciones dadas, determine los valores de las otras dos funciones restantes, entre $\cos(\theta)$, $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\tan(\theta)$

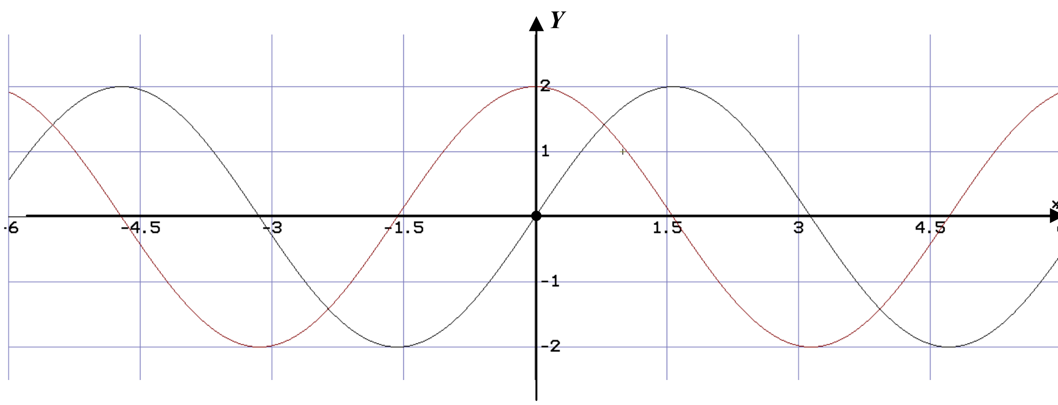
   a) $\operatorname{sen}(\theta) = -5/12$ y $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, $\cos(\theta)$ = ... $\tan(\theta)$ =..........

   b) $\tan(\theta) = -4/3$ y $\pi < \theta < 3\pi/2$, $\cos(\theta)$ = ... $\operatorname{sen}(\theta)$ =.......... 4 pts

   c) $\operatorname{sen}(\theta) = 3/7$ y $\pi/2 < \theta < \pi$, $\sec(\theta)$ = ... $\tan(\theta)$ =..........

   d) $\cos(\theta) = 4/\sqrt{30}$ y $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, $\csc(\theta)$ = ... $\tan(\theta)$ =..........

5. Las dos curvas continuas representan las gráficas de las funciones seno y coseno:



de

   b) Indique los intervalos donde la gráfica de la función seno es creciente y otros intervalos donde sea decreciente.

   c) Indique un intervalo donde la curva coseno es creciente y otro donde sea decreciente.

   d) Indique, aproximadamente, en que puntos ambas curvas son iguales. 4 pts

   e) ¿Cuál de las curvas es simétrica respecto al origen y cuál respecto al eje ***Y***?

PRUEBA DE PROCESO DE LA CUARTA UNIDAD MODULAR

1. Calcule:

a) $E = \arctan(3/4) + \arctan(\sqrt{3})$ b) $E = \text{arcsec}(2) + \text{arcsec}(\sqrt{2})$

c) $E = \arccos(\sqrt{3}/2) + \text{arcsen}(-1/2)$ d) $E = \text{arcsen}(5/7) + \arccos(5/7)$

4 pts

2. Calcule:

a) $\cos(\text{arcsen}(-0{,}6))$ b) $\cot[\frac{1}{2}\arccos(1/2)]$

c) $\cos[2\arctan(\sqrt{3})$ d) $\tan(2\text{arcsen}(x))$, $(0 < x < 1)$

4 pts

3. Demuestre las siguientes identidades:

a) $2\arctan(1/2) = \arctan(4/3)$

b) $2\arctan(1/3) + \arctan(1/7) = \pi/4$

c) $\text{arcsen}(4/5) + \text{arcsen}(3/4) = \pi/2$

d) $\arccos(12/13) + \arctan(1/4) = \text{arccot}(43/32)$

4 pts

4. a) Pruebe que: si $-1 < x < 1$, entonces $\text{arcsen}(x) + \arccos(x) = \pi/2$.

b) si $\text{sen}(\theta) = y$ con $0 < y < 1$. Exprese en términos del arcsen el arccos y el arctan

c) Determine la verdad o falsedad de: $\text{arcsen}(-3/5) = \arctan(3/4)$.

d) Halle el intervalo de variación de "θ" para $\arccos[(\theta/2]$.

4 pts

5. Completa en los espacios subrayados:

a) La función inversa de la tangente se denota ....

b) La función tangente inversa se define como la inversa de la función .... restringida al Dominio $]-\pi/2, \pi/2[$.

c) El dominio de la función tangente inversa es ....

d) El rango de la función coseno gente inverso es ....

4 pts

PRUEBA DE PROCESO DE LA QUINTA UNIDAD MODULAR

1. Analice si es cierto o falso?

   a) Existe un número real θ, tal que $\cos(\theta) < 0$ y $\text{sen}(\theta) > 0$.

   b) $\text{sen}(-5) = \text{sen}(5)$ (4 ptos)

   c) Si θ es un número cuadrantal, entonces $\cos(\theta)$ y $\text{sen}(\theta)$ son enteros.

   d) $\text{Cos}(\pi - 2) = \cos(2)$.

2. Smplificar las expresiones:

   a) $\dfrac{2 + sen(\theta)}{\cos(\theta)} + \dfrac{3}{sen(\theta)}$ (4 ptos)

   b) $\dfrac{sen(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \dfrac{2}{1 + \cos(\theta)}$

3. Demuestre las equivalencias:

   a) $\dfrac{a}{sen(\theta)} + \dfrac{c}{\cos(\theta).sen(\theta)} \equiv \dfrac{a\cos(\theta) + c}{sen(\theta).\cos(\theta)}$

   b) $\dfrac{\sec(\theta)}{\tan(\theta) + \cot(\theta)} \equiv sen(\theta)$

3. a) ¿Qué expresión equivale a la igualdad: $\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) =$ (4 ptos)

   b) Si $\text{sen}(\alpha) = 1/3$, $\cos(\theta) = 1/4$, con α en II-C y θ en I-C. Determine $\cos(\alpha + \theta)$.

5. a) Exprese $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$, como F.T. de las suma de dos ángulos

   b) El valor de θ que satisface la igualdad $\cot(\theta).\tan(2\theta) = 3$, es: (4 ptos)

Anexo Nº 8

EVALUAIÓN DE SALIDA

1. Si $E(\theta) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, entonces:

   a) csc(θ) = ... tan(θ) = ...

   b) $\tan^2(\theta)$ = ………………… .... = $\dfrac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$

2. Complete las líneas punteadas según el caso:

   a) …….= sen(x).cos(y) + cos(x).sen(y) cos($x - y$) = …………

   b) Rango del seno = ………….. arctan(−1) = ...

3. a) Encuentre el intervalo de "x" para que se cumpla: sen(θ) = $\dfrac{5x-3}{2}$

   b) Si cos(θ) = $\dfrac{1}{2}$ y sen(α) = −1, entonces 2tan(α) − 3sec(θ) =..............................

4. a) ¿Cuál de los siguientes ángulos son coterminales con120°?

   i) –240° ii) –7π/6 rad iii) 4,2 rad

   b) Demuestre que: $\dfrac{\cos(\theta)}{1+sen(\theta)} + \dfrac{\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)} = 2\sec(\theta)$

5. a) La diagonal mayor de un paralelogramo mide 35 cm, y forman ángulos de 25º y 32º con los lados. Determine la longitud de los lados del paralelogramo.

   b) Dado $\tan(\theta) = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$ y π < θ < 3π/2, determine cos(θ).

6. a) Determine el valor de: cos(arcsen(0,8)) + sen(arccos(0,6))

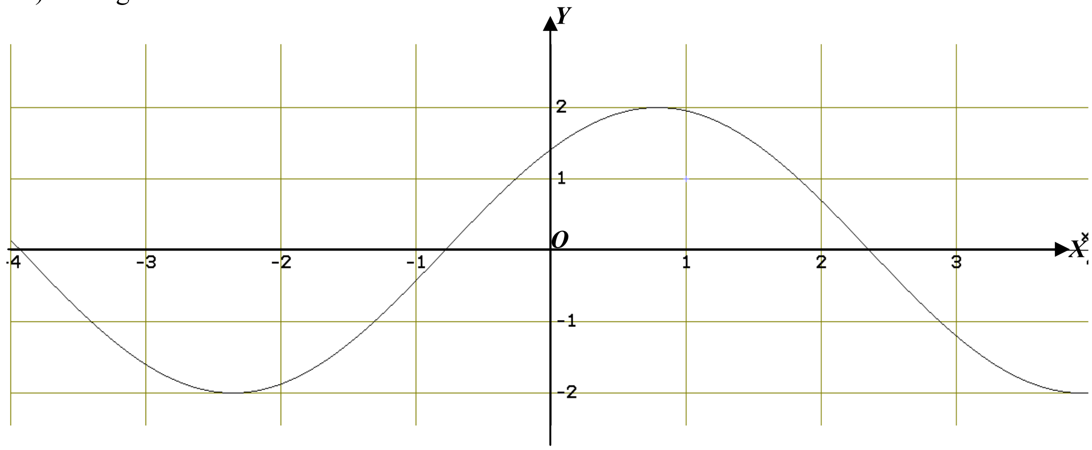
   b) Al hacer la composición y/o descomposición de las fuerzas:

   $|F_1| = 5$, $\theta_1 = 53º$; $|F_2| = 7$, $\theta_2 = 90º$ y $|F_3| = 10$, $\theta_3 = 217º$

   Se obtiene como resultante: F_R = ... y θ_R = ...

7. a) Indique a qué cuadrante pertenecen el lado terminal de los ángulos α = 7π/3 rad y β = 1500º y que relación existe entre ellos. Grafique.

b) En el gráfico mostrado:



-) Identifique el dominio y rango

-) Indique la amplitud

-) Identifique le período

-) Indique un intervalo de crecimiento y otro decrecimiento.

-) Determine la posible ecuación de la función.

8. Desarrolle según se pide:

c) Ilustre la gráfica de la función $y = 3.\text{sen}(x)$, compare con el gráfico de $y = \text{sen}(x)$ e identifique su dominio y rango, valor mínimo y máximo, si es impar o par, intervalo de crecimiento y decrecimiento.

d) $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\cos(\beta) = \frac{3}{4}$, α en II-C y β en I-C. Hallar el valor de $\cos(\alpha + \beta)$

9. Simplifique:

a) Simplifique la expresión: $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

b) Deducir la fórmula para $\text{sen}(3\theta)$, en términos de $\text{sen}\theta$.

10. Desarrolle lo que se le pide:

c) Determine los valores de "*x*" que satisfaga la ecuación $\sec(2x + \frac{\pi}{6}) = 2$.

d) Simplifique: $\dfrac{\cos(-\beta).\tan(-\beta)}{\cos(-\beta) + sen(-\beta).\cos(\beta) - \left[sen^2(-\beta) + \cos^2(-\beta)\right]\cos(-\beta)}$.

11. Diga usted ¿cuál de los 10 problemas anteriores los resolvió con solvencia y en cuál tuvo dificultad?...
....

RESULTADOS PRUEBA DE SALIDA DEL GRUPO EXPERIMENTAL

Nro.	Item-1	Item-2	Item-3	Item-4	Item-5	Item-6	Item-7	Item-8	Item-9	Item-10	NOTAS
1	2	2	1.5	1	2	2	1.5	2	1	1.5	16.5
2	1.5	2	1	1	1.5	2	1	2	0	1	13
3	2	1	2	1	1	1.5	1	2	1.5	1	14
4	2	1.5	1	1	1	1	1.5	1	1	1.5	12.5
5	1.5	2	1.5	1.5	1	1.5	1	2	1.5	1.5	15
6	2	2	1.5	2	1.5	1	1.5	1.5	2	2	17
7	1.5	1	1	1.5	1	1.5	1	1.5	1	1	12
8	2	1.5	2	1.5	1.5	1	2	2	1.5	1	16
9	1.5	2	2	1	1	1.5	1.5	1	1.5	2	15
10	2	1.5	1.5	2	1	2	1.5	1.5	2	1.5	16.5
11	1.5	2	1	1.5	2	1	1	1	1	1.5	13.5
12	1.5	0.5	1.5	1.5	1.5	1.5	2	2	1.5	2	15.5
13	1.5	1	0.5	1	1	1	1.5	1	1	1	10.5
14	2	2	1	1.5	2	1	1	1	2	2	15.5
15	2	1.5	2	2	1	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	16
16	1.5	1.5	1.5	1	1.5	1	1	1	1	0	11
17	1.5	1	1	1	1	1.5	1.5	1.5	0.5	1	11.5
18	2	1.5	2	2	0.5	1	1	1.5	1.5	2	15
19	1.5	1	1	1.5	1	1.5	1.5	1	1	1	12
20	1.5	1.5	1.5	1	2	2	1	2	2	1.5	16
21	2	1	1.5	2	1.5	1.5	2	2	2	1	16.5
22	1.5	1.5	1.5	1.5	2	1	1.5	2	1.5	1	15
23	2	2	2	2	1	1.5	1.5	1	1.5	1.5	16
24	1.5	2	1	1.5	1.5	1	1	1.5	1	1.5	13.5
25	2	2	1.5	2	1.5	2	2	1.5	1.5	1	17
26	1.5	1.5	1.5	1	2	1.5	1	2	2	1.5	15.5
27	2	2	1	1.5	1.5	1	1	1.5	1	1.5	14
28	2	1.5	1.5	2	2	1.5	1.5	1	0.5	1.5	15
29	1	1	2	1	1	1	0	1	1	1	10
30	2	2	2	1	1.5	1.5	1	1	2	2	16
31	1.5	2	1.5	1	0	1.5	1.5	1	1	1	12
puntaje	53.5	48.5	45	44	41.5	43	40.5	45.5	41	42	444.5
efectividad	0.863	0.782	0.726	0.71	0.669	0.694	0.653	0.734	0.661	0.677	0.717
Nota mayor	17										
Nota menor	10										
Rango	7										
Promedio	14.34										
Varianza	4.14										
Desvi. Estándar	2.035										
Coef de Variació	0.142										
Mediana	15										

RESULTADOS DE LA PRUEBA DE SALIDA DEL GRUPO DE CONTROL

Nro.	Item-1	Item-2	Item-3	Item-4	Item-5	Item-6	Item-7	Item-8	Item-9	Item-10	NOTAS
1	1	1.5	1.5	0	1.5	2	1.5	1	1	1.5	12.5
2	1.5	2	1	1	1.5	2	1	0	0	1	11
3	2	1	1	1.5	1	1	1	1.5	1.5	0.5	12
4	0.5	1.5	1.5	1	0	0.5	1	1	1	1	9
5	1.5	1	1	1.5	1	1.5	1.5	1	1.5	1.5	13
6	2	1.5	1	2	1.5	1.5	1	1.5	1.5	1.5	15
7	1.5	0	1.5	1	1.5	1.5	1.5	1	1.5	2	13
8	1	1	1	1	1	1	0	0.5	0	0.5	7
9	1.5	1	1.5	0.5	2	1	1	1	1	1.5	12
10	2	1.5	1.5	1	1.5	1.5	1.5	1.5	0.5	0	12.5
11	1.5	2	1	1.5	1	1.5	1	1.5	1	1	13
12	1.5	1	1.5	1	1	1	1	1.5	1	0.5	11
13	1.5	1.5	1	1	1.5	1	1.5	2	1	1	13
14	2	1	1.5	1	1.5	1.5	1.5	1	1.5	1.5	14
15	2	1.5	1	1.5	1	1	1	1.5	1	1.5	13
16	1.5	1	1.5	1	1.5	1	1.5	1	1	1	12
17	1.5	1	1.5	1	1.5	1.5	1	1.5	1	1	12.5
18	2	1.5	1	2	1	1.5	1	1	1.5	1.5	14
19	1.5	2	2	1	2	1.5	2	1.5	2	1.5	17
20	1.5	1	1.5	1	1.5	1	1	1	1	1.5	12
21	2	1.5	1	1.5	1	1.5	1.5	1	1	1	13
22	1.5	0	2	1	1.5	2	1	1.5	2	1.5	14
23	2	1.5	2	1.5	1	1.5	1.5	1	2	2	16
24	1.5	1	0	1	1.5	1.5	1	0	0.5	1	9
25	2	1.5	1	0.5	1.5	1	1.5	1	1	1.5	12.5
26	1.5	1	1	1	0	1	0.5	2	0	0	8
27	1	1.5	0	1	1	1.5	1	1	1	1	10
28	2	1	1.5	1	1.5	1	1.5	1	1.5	1	13
29	1	1.5	1	1.5	1	1.5	1	0	1	0	9.5
30	2	1	1.5	1	1.5	2	1	1.5	1.5	1.5	14.5
31	1.5	1	1.5	1	1.5	0.5	1	1	1	1	11
32	1	1.5	2	1.5	1	1	1	1.5	1	0	11.5
puntaje	49	38	39	36	38.5	40	35.5	35	34	33	378
efectividad	0.766	0.594	0.609	0.563	0.602	0.625	0.555	0.547	0.531	0.516	0.591
Nota mayor	17										
Nota menor	7										
Rango	10										
Promedio	12.20										
Varianza	4.76										
Desv. Estándar	2.181										
Coef. de Variació	0.179										
Mediana	12.5										

Anexo Nº 9

COLEGIO NACIONAL DE APLICACIÓN HERMILIO VALDIZÁN

AUTOEVALUACIÓN

Nombre del evaluado: ....
Tema: ....
Fecha: ....
Señala con una X la calificación que tu cree que te corresponde

Í T E M	Muy Frecuente mente	Frecuente mente	Algunas veces
1. Cumplí con las tareas que me asignó el profesor			
2. Aporté con ideas al trabajo grupal realizado			
3. Escucho con interés las consultas hechas por mis compañeros			
4. Acepto y utilizo diversas estrategias para resolver un problema			
5. Tomo en cuenta las ideas y sugerencias del profesor			
6. Participo en la resolución de ejercicios “para practica”			
7. Asimilé los conceptos y ejemplos de esta sección			
8. Llegué a conclusiones o elaboré conclusiones del tema			

COLEGIO NACIONAL DE APLICACIÓN HERMILIO VALDIZÁN

COEVALUACIÓN

Nombre del evaluado: ....

Tema: ....

Fecha: ....

Señala con una “X” la calificación que tu crees que te corresponde

Í T E M	Muy Frecuente mente	Frecuente mente	Algunas veces
1. Participa en clase en las actividades del grupo			
2. Sabe escuchar a los demás			
3. Toma en cuenta las sugerencias y recomendaciones del profesor			
4. Encuentra ideas centrales e ideas centrales			
5. Respeta la opinión de los demás			
6. Sintetiza la información y controla el tiempo			
7. Se esfuerza por resolver las tareas asignadas			
8. Resuelve los problemas con seguridad y solvencia			